

Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

Von Herrn *E. Hellinger* in Marburg a. d. L.

Die Theorie der Integralgleichungen und die anschließenden neueren Untersuchungen sind von vornherein von dem Bestreben getragen worden, die Sätze der Algebra über lineare Gleichungssysteme und speziell zunächst einmal die Sätze über die orthogonale Transformation einer reellen quadratischen Form von n Veränderlichen auf eine Summe von n Quadraten in das Gebiet unendlichvieler Veränderlicher zu übertragen. Dabei besteht bei denjenigen Integralgleichungen, auf die sich die ersten grundlegenden Untersuchungen von Herrn *Hilbert**) bezogen, und die später von Herrn *Erh. Schmidt****) auf neue Art behandelt wurden, noch insofern völlige Analogie zur Algebra, als sich die den quadratischen Formen entsprechenden zugehörigen Doppelintegrale tatsächlich als Summe von höchstens abzählbar vielen Quadraten in einer jener orthogonalen Transformation völlig entsprechenden Weise darstellen ließen. Wesentlich darüber hinaus ging Herr *Hilbert* später***), indem er statt der Integralgleichungen direkt Gleichungen mit abzählbar unendlichvielen Unbekannten bzw. quadratische Formen unendlichvieler

*) „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen“. 1. Mittel., Nachr. d. K. Ges. d. W. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1904, S. 49.

**) „Entwicklung-willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener“. Dissert. Göttingen 1905. — Abgedruckt als 1. Abhandl. „Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen“. Mathem. Ann. 63 (1907), S. 433.

***) „Grundzüge...“. 4. Mittel. Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1906, S. 154. (Zitiert als „*Hilbert IV*“). — Vgl. auch 5. Mittel., ebenda, S. 439 („*Hilbert V*“).

Veränderlicher betrachtete und hier die Theorie einer wesentlich umfassenderen Klasse von Formen („beschränkte“ Formen) entwickeln konnte; hier treten nämlich Formen auf, die eine orthogonale Transformation auf eine *Summe abzählbar vieler Quadrate* nicht mehr gestatten, wohl aber eine ganz analoge kanonische Darstellung durch ein gewisses *Integral*, also gewissermaßen durch eine Summe von kontinuierlich vielen Summanden. Das Integrationsgebiet dieses Integrales (also ein *Kontinuum* von Zahlen) tritt demgemäß als neue Invariante zu den abzählbar unendlichvielen im vorhergehenden Falle allein das Invariantensystem bildenden „Eigenwerten“ (das sind die Koeffizienten der einzelnen Quadrate in der Quadratsumme) hinzu. Ich habe in meiner Dissertation*) auf den *Hilbertschen* Resultaten fußend die Frage nach dem *vollständigen* Invariantensystem jener Klasse quadratischer Formen erörtert und die notwendigen und hinreichenden Kriterien dafür angegeben, wann zwei quadratische Formen unendlichvieler Veränderlicher orthogonal ineinander transformierbar sind.

Es entsteht nun die Frage, ob man nicht diese Resultate und damit die gesamte Theorie der beschränkten Formen in direkter Weise unabhängig von der *Hilbertschen* Theorie ableiten kann, d. h. insbesondere unabhängig von dem bei *Hilbert* den springenden Punkt bildenden Grenzübergang aus dem algebraischen Gebiete und den dabei naturgemäß erforderlichen schwierigen Konvergenzbetrachtungen. Eine solche neue Begründung der Theorie gebe ich in der vorliegenden Arbeit; sie hat zugleich den Vorzug, wie ich in einer folgenden Abhandlung des näheren darzulegen gedenke, daß sie ihrem Wesen nach unabhängig davon ist, ob die zu behandelnde quadratische Form durch eine *Summe* als Funktion abzählbar unendlichvieler Veränderlicher, oder durch ein *Integral* als Funktion einer integrierbaren Funktion gegeben ist — d. h. daß sie im wesentlichen unverändert auch die Theorie von *Integralgleichungen* mit unstetigen Kernen (denn solche entsprechen im allgemeinen den beschränkten quadratischen Formen) liefert**).

*) „Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variablen.“ Göttingen 1904.

***) Solche Kerne hat Herr *E. Hilb* (Math. Ann. 66 (1908), S. 1) für eine Reihe typischer aus Differentialgleichungen entspringender Fälle durch Grenzübergang von stetigen Kernen aus behandelt; etwa gleichzeitig hat Herr *H. Weyl* („Singuläre Integral-

Im ersten Kapitel behandle ich die Eigenwerte der quadratischen Form K , von ihrer bekannten Definition mit Hilfe der zur Formenschar $K - \lambda E$ (wo E die Einheitsform und λ ein Parameter ist) gehörigen homogenen Gleichungen ausgehend, in analoger Weise, wie es Herr *E. Schmidt* in seiner genannten Dissertation für Integralgleichungen mit stetigem Kern getan hat. Um in ähnlicher Weise auf das Streckenspektrum zu kommen, verwende ich im zweiten Kapitel systematisch solche Lösungssysteme derselben homogenen Gleichungen, für die nicht mehr die Quadratsumme der abzählbar vielen Unbekannten selbst, sondern die ihrer Integrale nach dem Parameter λ konvergiert; da jedoch nur die *Integrale* dieser Lösungen eine orthogonalen Transformationen gegenüber unabhängige Existenz haben, so müssen vorzugsweise diese betrachtet werden, und statt der Lösungen selbst erscheinen die bereits in meiner Dissertation eine wichtige Rolle spielenden „*Differentiallösungen*“. Aus diesen Betrachtungen ergibt sich die kanonische, alle Orthogonalinvarianten der Form liefernde Darstellung, — vorausgesetzt, daß zu jeder nicht identisch verschwindenden Form entweder Lösungen der einen Art (Eigenwerte) oder solche der andern Art (Streckenspektrum) existieren. Diesen fundamentalen Existenzsatz beweise ich im dritten Kapitel in einfacher, direkter Weise, indem ich die mit Hilfe eines von Herrn *E. Hilb**) herrührenden Verfahrens für komplexe Parameterwerte ν gebildete reziproke Form der Form $K - \nu E$ an die reelle Achse heran verfolge und aus der Untersuchung der Singularitäten, die sie dort notwendig besitzen muß, jene ausgezeichneten Lösungen herleite; dabei kommt aus der Theorie der analytischen Funktionen nur der *Cauchysche* Integralsatz für durchaus regulär begrenzte, ganz im Regularitätsbereich der Funktion liegende Bereiche zur Anwendung.

gleichungen ...“ Diss. Göttingen 1908) den einfachen Fall regulärer einfacher Spektren durch Übertragung der Resultate der *Hilbertschen* 4. Mitt. mittels eines Systemes von Orthogonalfunktionen behandelt. Mit dem gleichen Hilfsmittel hat dann Herr *Weyl* gelegentlich der Wiedergabe seiner Dissertation (Math. Ann. 66 (1908), S. 273) eine allgemeine Theorie aus den Ergebnissen meiner Dissertation abgeleitet; Herr *M. Plancherel* (Riv. di Fis. Mat. (Pavia) X (1909), S. 37) hat durch Benutzung des *Riesz-Fischerschen* Satzes diesen Übergang vereinfacht.

*) „Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.“ Sitzungsber. d. Phys.-Med. Societ. in Erlangen. 40 (1908), S. 84.

Kapitel I.

Untersuchung des Punktspektrums.

§ 1.

Fundamenteigenschaften linearer und quadratischer Formen
unendlichvieler Veränderlicher.

Es sollen hier zunächst eine Reihe einfacher Begriffsbildungen und Konvergenzeigenschaften ohne Beweis kurz zusammengestellt werden, die in unsern Betrachtungen gebraucht werden und für ihr Verständnis nötig sind; sie entstammen zumeist der vierten Mitteilung *Hilberts**) und sind seither vielfach angewendet worden.

Definitionen: Eine *lineare Form* der abzählbar unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots

$$L(x) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots = \sum_{(p)} l_p x_p \quad (**)$$

bzw. eine *bilineare Form* zweier Reihen solcher Veränderlicher x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots

$$A(x, y) = \sum_{(p, q)} a_{pq} x_p y_q$$

heißt *beschränkt*, wenn jeder „ n -te Abschnitt“

$$\sum_{p=1, \dots, n} l_p x_p \quad \text{bzw.} \quad \sum_{p, q=1, \dots, n} a_{pq} x_p y_q$$

für jedes den Ungleichungen

$$(1.) \quad \sum_{(p)} x_p^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots \leq 1, \quad \sum_{(p)} y_p^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots \leq 1$$

genügende Wertsystem der Variablen dem absoluten Werte nach unterhalb einer endlichen, von n unabhängigen Grenze bleibt. Diese Definitionen

*) *Hilbert* IV, S. 176—182.

**) In den mit $\sum_{(p)}$ bzw. $\sum_{(p, q)}$ bezeichneten Summen sollen die Indizes p und q stets unabhängig voneinander alle ganzzahligen Werte $1, 2, \dots$ durchlaufen.

gelten auch bei komplexen Koeffizienten und Variablen, wenn man diese nur der Konvergenzbedingung

$$(1.) \quad \sum_{(p)} |x_p|^2 = \sum_{(p)} x_p \bar{x}_p \leq 1, \quad \sum_{(p)} |y_p|^2 = \sum_{(p)} y_p \bar{y}_p \leq 1$$

an Stelle von (1.) unterwirft*).

Das Haupthilfsmittel bei den übrigens sehr einfachen Beweisen der nunmehr aufzuführenden Konvergenzsätze ist die sog. „*Schwarzsche Ungleichung*“**), die für reelle Größen

$$(2.) \quad \left(\sum_{(p)} x_p y_p \right)^2 \leq \sum_{(p)} x_p^2 \cdot \sum_{(p)} y_p^2$$

und für komplexe Größen***)

$$(2.) \quad \left| \sum_{(p)} x_p y_p \right|^2 \leq \sum_{(p)} |x_p|^2 \cdot \sum_{(p)} |y_p|^2$$

lautet und zugleich die Konvergenz der links stehenden Summen als Folge der Konvergenz der rechts auftretenden Quadratsummen behauptet.

Linearformen: Eine Linearform $L(x)$ ist stets dann und nur dann beschränkt, wenn die Quadratsumme $\sum_{(p)} |l_p|^2$ der Beträge der Koeffizienten (bei reellen l_p also $\sum_{(p)} l_p^2$ selbst) konvergiert. Die Reihe $\sum_{(p)} l_p x_p$ konvergiert in diesem Falle wegen der aus (2.) sich für ihren Rest sofort ergebenden Abschätzung absolut und gleichmäßig für alle (1.) bzw. (1.) genügenden Wertsysteme; insbesondere folgt hieraus, falls $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots$ für $n = 1, 2, \dots$ unendlichviele (1.) genügende Wertsysteme bedeuten, für die der Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_p^{(n)} = x_p$$

für jedes einzelne p existiert, daß

*) \bar{x}_p bedeutet stets den konjugiert imaginären Wert von x_p .

**) *Hilbert* IV, S. 176.

***) *E. Schmidt*, „Über die Auflösung linearer Gleich. mit unendl. vielen Unbek.“ *Rendic. del Circ. mat. di Palermo*. XXV (1908), S. 58.

$$(3.) \quad \int_{n=\infty} \sum_{(p)} l_p x_p^{(n)} = \sum_{(p)} l_p x_p$$

ist, d. h. die Linearform besitzt als Funktion der unendlichvielen Variablen die hierin ausgesprochene Stetigkeitseigenschaft (die sog. „Vollstetigkeit“)*. Dieselben Aussagen gelten offenbar auch, wenn man Koeffizienten und Variable vertauscht; speziell sei hervorgehoben, daß für eine von einem Parameter λ abhängige Schar beschränkter Linearformen $\sum_{(p)} l_p(\lambda) x_p$ die sie darstellende Reihe auch gleichmäßig in λ konvergiert, wofern nur ihr Wert $L(\lambda, x)$ bzw. die Größe $\sum_{(p)} l_p(\lambda)^2$ eine auch von λ unabhängige obere Schranke hat.

Bilinearformen: Eine beschränkte Bilinearform $A(x, y)$ konvergiert im allgemeinen nur im gebräuchlichen Sinne der Doppelreihenkonvergenz, sowie bei zeilen- und kolonnenweiser Summation — und zwar allemal gegen denselben Wert:

$$(4.) \quad A(x, y) = \int_{n=\infty} A_n(x, y) = \int_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \sum_{\substack{p=1, \dots, m \\ q=1, \dots, n}} a_{pq} x_p y_q = \sum_{(p)} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right)$$

— vorausgesetzt natürlich immer, daß die Variablen der Bedingung (1.) genügen**). In jedem Falle aber ergibt sich**), daß der Rest der Reihe unter dem Produkte von $\sqrt{x_{m+1}^2 + x_{m+2}^2 + \dots} + \sqrt{y_{n+1}^2 + y_{n+2}^2 + \dots}$ in eine nur von der oberen Grenze aller Werte $|A(x, y)|$ abhängige Zahl bleibt. Demzufolge hat A als simultane Funktion der beiden Variablenreihen x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots betrachtet im allgemeinen nicht mehr die „Vollstetigkeitseigenschaft“ (3.)***), sondern es gilt

$$\int_{n=\infty} A(x^{(n)}, y^{(n)}) = A(x, y), \text{ wenn } \int_{n=\infty} x_p^{(n)} = x_p, \int_{n=\infty} y_p^{(n)} = y_p,$$

nur noch dann, wenn gleichzeitig die „Entfernungen“

*) Hilbert IV, S. 200. — V, S. 441.

**) Hilbert IV, S. 178, 180.

***) Daraus folgt speziell, daß $A(x, y)$ die obere Schranke seines Wertevorrates im Bereiche (1.) nicht mehr an einer Stelle dieses Bereiches anzunehmen braucht.

$$\sum_{n=\infty}^{(p)} \sum (x_p^{(n)} - x_p)^2 = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{n=\infty}^{(p)} \sum (y_p^{(n)} - y_p)^2 = 0$$

gegen Null konvergieren. Andererseits aber bleibt, wenn wir für ein festes Wertsystem der x und y die Werte einer einparametrischen Formenschar $A(\lambda; x, y) = \sum_{(p,q)} a_{pq}(\lambda) x_p y_q$ betrachten, die gleichmäßige Konvergenz der darstellenden Reihe für alle λ bestehen, wofern nur $A(\lambda; x, y)$ eine von λ unabhängige endliche obere Schranke hat.

Faltungsprozesse: Unter der *Faltung* zweier beschränkter Linearformen $L(x)$, $M(x)$ verstehen wir die wegen (2.) notwendig existierende Zahl:

$$(4.) \quad (L, M) = L(\cdot) M(\cdot) = \sum_{(p)} l_p m_p.$$

In ähnlicher Weise kann man aus $L(x)$ und einer beschränkten Bilinearform $A(x, y)$ zwei im allgemeinen verschiedene Faltungen bilden, die ihrerseits beschränkte Linearformen sind:

$$(5.) \quad \begin{cases} A(x, \cdot) L(\cdot) = AL(x) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p l_q, \\ A(\cdot, y) L(\cdot) = LA(y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} l_p y_q. \end{cases}$$

Ist $A(x, y)$ speziell dem Produkte zweier Linearformen $M(x)N(y)$ gleich, so ist

$$(5^a.) \quad AL(x) = M(x)(N, L); \quad LA(y) = (L, M)N(y), \quad \text{wo} \quad A = M(x)N(y).$$

Endlich geht aus zwei beschränkten Bilinearformen $A(x, y)$ und $B(x, y)$ als „Faltung“ eine neue notwendig wiederum beschränkte Bilinearform hervor*):

$$(6.) \quad A(x, \cdot) B(\cdot, y) = AB(x, y) = \sum_{(p,q)} (\sum_{(a)} a_{pa} b_{aq}) x_p y_q,$$

die wir in der Sprache des Matrizenkalküls, wo für jede Bilinearform, bzw. das System ihrer Koeffizienten, ein Buchstabe $A = (a_{pq})$ gesetzt wird, auch

*) *Hilbert IV, S. 178 f.*

als Produkt AB von A und B bezeichnen werden; ihr Wert kann auch als

$$(6a.) \quad AB(x, y) = \sum_{(a)} \left(\sum_{(p)} a_{pa} x_p \right) \left(\sum_{(q)} b_{aq} y_q \right)$$

dargestellt werden. Bezeichnen M und N die Maxima bezw. die oberen Schranken der absoluten Beträge der Formen A und B unter der Nebenbedingung (1.), so gilt unter derselben Bedingung

$$(6b.) \quad |AB(x, y)| \leq MN.$$

Für alle diese Faltungsprozesse gilt das „assoziative Gesetz“, insbesondere sei hervorgehoben:

$$(7a.) \quad (M, AL) = (MA, L)$$

$$(7b.) \quad (AB)C = A(BC).$$

Quadratische Formen: Jeder reellen symmetrischen Bilinearform ($a_{pq} = a_{qp}$) gehört die *quadratische Form*

$$A(x, x) = A(x) = \sum_{(p, q)} a_{pq} x_p x_q \quad (a_{pq} = a_{qp})$$

zu, aus der $A(x, y)$ umgekehrt durch „Polarisierung“ entsteht; die obere Schranke der Beträge der quadratischen Form ist mit derjenigen der symmetrischen Bilinearform — immer unter der Nebenbedingung (1.) — identisch. Zu jeder reellen unsymmetrischen Bilinearform $A(x, y)$ kann man mit Hilfe der „transponierten Form“

$$(8.) \quad A'(x, y) = \sum_{(p, q)} a_{qp} x_p y_q = A(y, x)$$

eine gewisse quadratische positiv definite Form

$$(8^a.) \quad A' A(x) = \sum_{(p, q, a)} a_{ap} a_{aq} x_p x_q = \sum_{(a)} \left(\sum_{(q)} a_{aq} x_q \right)^2 \geq 0$$

bilden. Ist A symmetrisch, so ist $A' A = A^2$ die Faltung von A mit sich selbst, und ebenso sind alle Faltungen A^4, A^6, \dots positiv definit; ist A selbst definit, so sind auch die Selbstfaltungen ungerader Ordnung A^3, A^5, \dots definit, da sie nur Werte aus dem Wertevorrat von $A(x)$ selbst annehmen.

Bei komplexen Koeffizienten haben die durch die Bedingung

$$a_{pq} = \bar{a}_{qp} \quad \text{oder} \quad A = \bar{A}'$$

(wo $\bar{A}(x, y) = \sum_{(p, q)} \bar{a}_{pq} x_p y_q$ gesetzt ist) charakterisierten „*Hermiteischen Formen*“ eine ähnliche Bedeutung*); setzt man x_p und y_p einander konjugiert komplex, so nehmen sie wieder reelle Werte an:

$$A(x, \bar{x}) = \sum_{(p)} a_{pp} |x_p|^2 + \sum_{(p \neq q)} (a_{pq} x_p \bar{x}_q + \bar{a}_{pq} \bar{x}_p x_q).$$

Aus jeder komplexen Form $A(x, y)$ kann man eine positiv definite *Hermiteische* Form bilden:

$$(9.) \quad \bar{A}' A(x) = \sum_{(p, q, a)} \bar{a}_{ap} a_{aq} \bar{x}_p x_q = \sum_{(a)} \left| \sum_{(q)} a_{aq} x_q \right|^2 \geq 0;$$

wir bemerken noch die aus (2.) folgende Ungleichung:

$$(9^a.) \quad |A(x, y)|^2 \leq \bar{A}' A(y) \quad \text{für} \quad \sum_{(p)} |x_p|^2 = 1.$$

Orthogonale Formen):** Ein System reeller Linearformen

$$L_p(x) = \sum_{(q)} l_{pq} x_q$$

*) *Hilbert* IV, S. 216.

**) *Hilbert* IV, S. 180f., 194f.

heißt *orthogonal* (genauer: orthogonal und normiert), wenn für je zwei von ihnen gilt:

$$(10.) \quad (L_p, L_q) = \sum_{(a)} l_{pa} l_{qa} = \delta_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{für } p \neq q \\ 1 & \text{für } p = q; \end{cases}$$

jede dieser Formen ist dann notwendig beschränkt. Denkt man sich ihre Koeffizienten etwa als Koordinaten eines Vektors im unendlichvioldimensionalen Raume der x_1, x_2, \dots , so stehen alle diese Vektoren aufeinander orthogonal*). — Für jedes Wertsystem x mit konvergenter Quadratsumme konvergiert die Quadratsumme beliebig vieler Orthogonalfunktionen und bleibt kleiner als $\sum_{(p)} x_p^2$ („Besselsche Ungleichung“)**):

$$(11.) \quad \sum_{(p)} (L_p(x))^2 = L_1(x)^2 + L_2(x)^2 + \dots \leq \sum_{(p)} x_p^2;$$

die linke Seite stellt eine beschränkte, übrigens positiv definite quadratische Form der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots dar.

Hat man irgend ein System von Orthogonalfunktionen, über dessen Mächtigkeit noch nichts bekannt ist, so gilt für jede Anzahl von ihnen doch die Ungleichung (11.) und daher durch Spezialisierung der Variablen auch jede der Ungleichungen

$$\sum_{(p)} l_{pq}^2 \leq 1. \quad (q=1, 2, \dots)$$

Daraus folgt für jedes einzelne q , daß höchstens 2 der Größen l_{1q}, l_{2q}, \dots größer als $\frac{1}{2}$, höchstens 3 größer als $\frac{1}{3}$ sein können und so fort, also schließlich, daß nur abzählbar unendlichviele von ihnen von Null verschieden sein können. Da es aber nur abzählbar unendlichviele Indexwerte $q = 1, 2, \dots$ gibt —, entsprechend den abzählbar unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots —, können auch in dem Schema *aller* Koeffizienten l_{pq} nur abzählbar viele von 0 verschiedene Größen vorhanden sein, und somit ist be-

*) Komplexe Linearformen heißen orthogonal, wenn $(L_p, \bar{L}_q) = 0$ (E. Schmidt, „Über die Auflösung...“; zitiert S. 214 Anm. ***).

***) Erh. Schmidt, Dissert. § 1. — Hilbert IV, S. 195.

wiesen, daß jedes System normierter orthogonaler Linearformen abzählbar unendlichvieler Variabler höchstens abzählbar unendlichviele Formen enthalten kann*).

Gilt nun speziell für ein Orthogonalsystem die Gleichung

$$(11'.) \quad L_1(x)^2 + L_2(x)^2 + \dots = \sum_{(v)} x_p^2,$$

so heißt es *vollständig*; jedes Orthogonalsystem kann man zu einem vollständigen durch Hinzufügung geeigneter Formen ergänzen**). Aus (11') folgt nun:

$$(10'.) \quad \sum_{(a)} l_{ap} l_{aq} = \delta_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{für } p \neq q \\ 1 & \text{für } p = q, \end{cases}$$

das sind die aus (10.) durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen im Koeffizientenschema $L = (l_{pq})$ hervorgehenden Gleichungen. Man kann beide Gleichungssysteme in der Matrixensymbolik zusammenfassen in

$$(10a.) \quad LL' = E, \quad L'L = E,$$

wenn E die „Einheitsform“

$$E(x) = \sum_{(p,q)} \delta_{pq} x_p x_q = \sum_{(p)} x_p^2$$

bedeutet. Auch die Bilinearform $L = \sum_{(p,q)} l_{pq} x_p y_q$ heißt orthogonal; sie ist notwendig beschränkt.

Wegen (10.) und (10') lösen die Gleichungssysteme

*) Der Beweis ist identisch mit dem von Herrn *E. Schmidt* (Comptes Rendus de l'acad. des sciences. Paris. T. 143 (1906), S. 955 für Orthogonalsysteme von Funktionen einer Variablen geführten.

**) *Hilbert* IV, S. 196.

$$(12.) \quad x'_p = L_p(x) = \sum_{(q)} l_{pq} x_q,$$

$$(12'.) \quad x_q = L'_q(x') = \sum_{(p)} l_{pq} x'_p$$

(das sind die zu den Bilinearformen L und L' gehörigen linearen Transformationen) sich gegenseitig auf und vermitteln daher eine umkehrbar eindeutige Transformation des unendlichvioldimensionalen Raumes der Punkte mit konvergenter Quadratsumme der Koordinaten. Diese Transformation ist obendrein wegen (11'.) *orthogonal*, d. h. sie führt die Einheitsform in sich selbst über:

$$\sum_{(p)} x_p^2 = \sum_{(p)} x'_p{}^2 \quad \text{oder} \quad E(x) = E(x');$$

umgekehrt ist jede eineindeutige orthogonale lineare Substitution in der Form (12.), (12'.) enthalten.

Die oben definierten Faltungsprozesse sind gegenüber orthogonalen Transformationen kovariant*), d. h. gehen durch (12.) die linearen oder bilinearen Formen M, A, \dots über in die notwendig gleichfalls beschränkten Formen:

$$M^*(x') = LM(x') = \sum_{(\alpha)} \left(\sum_{(p)} l_{\alpha p} m_p \right) x'_\alpha,$$

$$A^*(x') = LAL'(x') = \sum_{(\alpha, \beta)} \left(\sum_{(p, q)} l_{\alpha p} k_{pq} l_{\beta q} \right) x'_\alpha x'_\beta, \dots,$$

so geben sie gefaltet einfach die transformierten Formen der durch den gleichen Faltungsprozeß aus L, A, \dots entstehenden Formen, z. B.:

$$(13.) \quad A^*M^* = (AM)^*, \quad A^*B^* = (AB)^*.$$

§ 2.

Eigenformen der quadratischen Form.

Wir beginnen nunmehr das Studium der *reellen beschränkten quadratischen Form unendlichvieler Veränderlicher*, die wir

*) Hilbert IV, S. 181.

$$K(x) = \sum_{(p,q)} k_{pq} x_p x_q \quad (k_{pq} = k_{qp})$$

schreiben*). Durch orthogonale Transformationen geht sie in andere quadratische Formen über, und es handelt sich besonders darum, die sämtlichen Invarianten von K gegenüber allen orthogonalen Transformationen anzugeben bzw. eine durch orthogonale Transformationen stets zu erzielende eindeutig bestimmte Normalform für K aufzustellen, aus der sich diese Invarianten ablesen lassen.

Genau wie in der Algebra (d. h. im Falle endlichvieler Variabler) betrachten wir zu diesem Ende die *Formenschar***)

$$A(x) = K(x) - \lambda E(x),$$

wo E die die orthogonalen Transformationen charakterisierende Einheitsform und λ ein Parameter ist, und gehen von der allgemeinen, natürlich noch wesentlich zu präzisierenden Bemerkung aus, daß *alle Werte λ , für die die Form A einen ausgezeichneten, orthogonalen Transformationen gegenüber unveränderlichen Charakter hat, orthogonale Invarianten von K sein werden.* Eine solche ausgezeichnete Eigenschaft, die ganz ebenso in der Algebra auftritt, ist z. B. — wie aus der Schlußbemerkung von § 1 hervorgeht — die *Existenz einer beschränkten „reziproken Form“ $K(\lambda; x)$ zu A , d. h. einer Form, deren Produkt (Faltung) mit A gleich der Einheitsform ist:*

$$AK(x) = \sum_{(p,q,a)} a_{pa} x_{aq} x_p x_q = E(x),$$

— oder andererseits die *Existenz einer „Nulllösung“, d. h. einer beschränkten Linearform $M(x)$, deren Faltung mit A identisch verschwindet:*

$$AM(x) = 0.$$

*) Es sei hier nur beiläufig bemerkt, daß sich die ganzen folgenden Entwicklungen im wesentlichen unverändert auch auf *Hermiteische* Bilinearformen anwenden lassen.

**) Herr *Hilbert* betrachtet entsprechend der bei Integralgleichungen üblichen Bezeichnungswiese die Schar $E - \lambda K$; seine Eigenwerte etc. sind also die reziproken Werte der im folgenden auftretenden.

Man kann das auch so ausdrücken: Im ersten Falle haben die zur Form A gehörigen *unhomogenen linearen Gleichungen* mit unendlichvielen Unbekannten

$$\sum_{(q)} a_{pq} x_q = y_p \quad \text{oder} \quad \sum_{(q)} k_{pq} x_q - \lambda x_p = y_p \quad (p=1, 2, \dots)$$

für jedes System der Größen y_p mit konvergenter Quadratsumme eine *eindeutig bestimmte Lösung mit konvergenter Quadratsumme*:

$$x_p = \sum_{(q)} \kappa_{pq} y_q; \quad (p=1, 2, \dots)$$

im zweiten Falle haben die *homogenen Gleichungen*

$$(1.) \quad \sum_{(q)} a_{pq} x_q = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{(q)} k_{pq} x_q - \lambda x_p = 0 \quad (p=1, 2, \dots)$$

eine von der trivialen Lösung $x_p = 0$ verschiedene Lösung $x_p = m_p$ mit konvergenter Quadratsumme der absoluten Beträge.

Man bestätigt hiernach leicht auch direkt, daß für einen bestimmten Wert von λ bei den zu einer orthogonal transformierten Form gehörigen Gleichungen stets derselbe Fall eintritt, wie hier bei der ursprünglichen Form, und zwar entstehen die betr. neuen Lösungen durch die gleiche orthogonale Transformation aus den Lösungen der ursprünglichen Gleichungen.

Wie in der Algebra stellt Fall I den „allgemeinen Fall“ dar, auf den wir erst später zurückkommen werden, nachdem wir uns mit den „Ausnahmewerten“ λ beschäftigt haben; zu diesen gehört, wie sich zeigen wird, außer dem Fall II noch eine wesentlich verschiedene in der Algebra noch nicht auftretende Klasse von λ -Werten.

Wir behandeln nun also zunächst die durch (1.) definierten sog. *Eigenwerte der Form K* . Es sollen hier nur einige allgemeine Eigenschaften dieser Eigenwerte abgeleitet, nicht etwa ihre Existenz bewiesen werden; denn die allgemeine beschränkte Form, die wir hier behandeln, muß nicht notwendig Eigenwerte haben. Die Methoden, die ich hierbei zunächst

anwende, sind wesentlich dieselben, wie sie bei der direkten Untersuchung von Integralgleichungen mit stetigen Kernen, die ja gewissen speziellen quadratischen Formen entsprechen, schon früher gebraucht worden sind*).

Ich zeige zunächst, daß jeder Eigenwert einer reellen quadratischen Form reell ist. Denn multiplizieren wir (1.) mit dem zu $x_p = \xi_p + i\eta_p$ konjugiert komplexen Wert $\bar{x}_p = \xi_p - i\eta_p$ und summieren über p , so folgt

$$\sum_{(p,q)} k_{pq} \bar{x}_p x_q = \lambda \sum_{(p)} \bar{x}_p x_p;$$

rechts ist jeder Term der Summe reell, links aber ist wegen der Realität von k_{pp} jeder Term mit $p = q$ und wegen $k_{pq} = k_{qp}$ auch die Summe je zweier symmetrischer Terme $k_{pq}(\bar{x}_p x_q + \bar{x}_q x_p)$ reell, so daß wir

$$\sum_{(p,q)} (k_{pq} \xi_p \xi_q + k_{pq} \eta_p \eta_q) = \lambda \sum_{(p)} (\xi_p^2 + \eta_p^2)$$

und damit λ als reellen Quotienten zweier reeller Zahlen erhalten. Da hier nur Werte der Form K für reelle Variable auftreten, folgt weiterhin noch unmittelbar, daß der Betrag jedes Eigenwertes unterhalb des Maximums von $K(x)$ für alle reellen, $\sum_{(p)} x_p^2 \leq 1$ genügenden Wertsysteme liegt.

Wir können uns darauf beschränken, zu jedem Eigenwerte λ ausschließlich reelle Lösungssysteme x_p der Gleichungen (1.) zu betrachten; denn wegen der Realität von λ und k_{pq} genügt sowohl der reelle als auch der mit i multiplizierte Teil einer eventl. komplexen Lösung von (1.) auch für sich diesen Gleichungen. Es ist bequem, mit jeder Lösung $x_p = m_p$ von konvergenter Quadratsumme zugleich auch die notwendig beschränkte Linearform $M(x) = \sum_{(p)} m_p x_p$ der unendlichvielen Variablen x_p zu betrachten, die eine zum Eigenwert λ gehörige Eigenform von $K(x)$ heißt. Wir schreiben demgemäß statt der unendlichvielen Gleichungen

$$\sum_{(q)} k_{pq} m_q = \lambda m_p \tag{p=1, 2, \dots}$$

auch die eine Identität in den unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots :

$$(2.) \quad KM(x) = \lambda M(x) \text{ oder kürzer } KM = \lambda M.$$

*) Vgl. *E. Schmidt, Dissertation, § 4 und 5.*

Wegen der Homogenität der Gleichungen (2.) kann man jede Eigenform $M(x)$ mit einem beliebigen konstanten Faktor multiplizieren; speziell kann man durch Division mit $\sqrt{(M, M)} = \sqrt{\sum_{(p)} m_p^2}$ die zu M gehörige „normierte Eigenform“

$$L(x) = \frac{M(x)}{\sqrt{(M, M)}}$$

bilden, die durch die Bedingung

$$(L, L) = 1$$

charakterisiert ist.

Um nun die *Gesamtheit der wesentlich verschiedenen Eigenformen* übersehen zu können, die möglicherweise zu ein und demselben zunächst *ungleich 0* angenommenen Eigenwert λ gehören, gehen wir von irgendeiner normierten Eigenform $L_1(x)$ aus, die also

$$(a_1.) \quad K L_1 = \lambda L_1, \text{ und } (L_1, L_1) = 1$$

genügt, und bilden die quadratische Form

$$(b_1.) \quad K_1(x) = K(x) - \lambda(L_1(x))^2.$$

Sie hat sicher L_1 nicht mehr zur Eigenform mit dem Eigenwert λ , denn es ist (vgl. § 1, (5^a)) wegen (a₁.):

$$(c_1.) \quad K_1 L_1(x) = K L_1(x) - \lambda L_1(x)(L_1, L_1) = 0.$$

Nun kann aber K_1 doch noch den gleichen Eigenwert λ mit einer anderen normierten Eigenform $L_2(x)$ haben:

$$(a_2.) \quad K_1 L_2(x) = \lambda L_2, \quad \text{wo } (L_2, L_2) = 1.$$

Indem wir diese Identität mit L_1 falten, erhalten wir

$$(L_1, K_1 L_2) = \lambda (L_1, L_2);$$

nun ist die linke Seite nach dem assoziativen Gesetze (7^a.) des § 1 gleich $(L_1 K_1, L_2)$, und da auch $K_1(x)$ als quadratische Form eine symmetrische Form ist, folgt (vgl. (5.) des § 1) $L_1 K_1(x) = K_1 L_1(x)$ und das verschwindet wegen (c₁.) identisch; daher wird auch $(L_1, K_1 L_2) = 0$ und mithin wegen $\lambda \neq 0$ auch

$$(L_1, L_2) = 0.$$

Damit und mit Hilfe von (a₂.) ergibt sich nun, wenn man die Identität (b₁.) mit L_2 faltet:

$$\lambda L_2 = K L_2(x),$$

d. h. auch L_2 gehört als Eigenform zum Eigenwert λ . Bildet man nun weiter

$$(b_2.) \quad K_2(x) = K_1(x) - \lambda L_2(x)^2 = K(x) - \lambda L_1(x)^2 - \lambda L_2(x)^2,$$

so folgt genau ebenso

$$K_2 L_1(x) = K_2 L_2(x) = 0;$$

aber es kann K_2 möglicherweise eine andere zu λ gehörige normierte Eigenform $L_3(x)$ haben, die dann notwendig wiederum eine zu L_1 und L_2 orthogonale Eigenform von $K(x)$ ist:

$$K L_3(x) = \lambda L_3; \quad (L_1, L_3) = (L_2, L_3) = 0, \quad (L_3, L_3) = 1.$$

Indem wir so immer weiter schließen, kommen wir zu einem ganzen System orthogonaler normierter Eigenformen $L_\mu(x)$, und da dieses (§ 1, S. 220)

höchstens abzählbar unendlichviele Formen enthalten kann, so folgt notwendig, daß wir nach endlichvielen oder abzählbar unendlichvielen Schritten zu einer Form

$$(3.) \quad K_0(x) = K(x) - \lambda \{L_1(x)^2 + L_2(x)^2 + \dots\}$$

gelungen, die keine zu λ gehörige Eigenform mehr hat, während die beschränkten Linearformen $L_1(x), L_2(x) \dots$ den Relationen

$$(4a.) \quad (L_\nu, L_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = \mu, \\ 0 & \text{für } \nu \neq \mu, \end{cases}$$

$$(4b.) \quad K L_\nu(x) = \lambda L_\nu(x), \quad (\nu=1, 2, \dots)$$

$$(4c.) \quad K_0 L_\nu(x) = 0 \quad (\nu=1, 2, \dots)$$

genügen.

Es sei nun $M(x)$ irgendeine zum Eigenwert λ gehörige Eigenform von $K(x)$:

$$(5.) \quad K M(x) = \lambda M(x).$$

Wir entwickeln M nach den Orthogonalformen L_1, L_2, \dots analog wie man eine willkürliche Funktion nach Orthogonalfunktionen in *Fourierscher* Manier entwickelt, d. h. wir bilden die Reihe:

$$(M, L_1) L_1(x) + (M, L_2) L_2(x) + \dots$$

Sie stellt notwendig eine beschränkte lineare Form dar; denn nach den Ungleichungen (2.) und (11.) des § 1 ist ihr Quadrat kleiner als

$$\sum_{(\nu)} (M, L_\nu)^2 \cdot \sum_{(\nu)} L_\nu(x)^2 \leq (M, M) \cdot \sum_{(\nu)} x_\nu^2.$$

Also ist auch die Differenz

$$(5'.) \quad N(x) = M(x) - \{(M, L_1)L_1(x) + (M, L_2)L_2(x) + \dots\}$$

eine beschränkte Linearform; wir zeigen, daß sie notwendig identisch verschwindet. Denn wegen (4^c) folgt durch Faltung mit $K_0(x)$:

$$K_0 N(x) = K_0 M(x).$$

Tragen wir rechts für K_0 den Wert (3.) ein und berücksichtigen, daß $L_\nu(x)^2$ mit einer Form $M(x)$ gefaltet $L_\nu(x) (L_\nu, M)$ ergibt (vgl. § 1, (5^a)), so folgt:

$$K_0 N(x) = K M(x) - \lambda \{L_1(x) (M, L_1) + L_2(x) (M, L_2) + \dots\},$$

oder wegen (5.) und (5'.):

$$K_0 N(x) = \lambda N(x);$$

$N(x)$ wäre also eine zum Eigenwert λ gehörige Eigenfunktion von K_0 und muß daher — unserer Annahme über $K_0(x)$ nach — identisch verschwinden. Demnach folgt aus (5'.)

$$M(x) = (M, L_1) L_1(x) + (M, L_2) L_2(x) + \dots,$$

d. h. jede zum Eigenwerte λ gehörige Eigenform von $K(x)$ ist ein lineares Aggregat der Orthogonalformen $L_1(x), L_2(x), \dots$ mit Koeffizienten von konvergenter Quadratsumme — und umgekehrt ist natürlich jedes solche Aggregat notwendig eine Eigenform.

Wir nennen die $L_1(x), L_2(x), \dots$, um diese Eigenschaft auszudrücken, ein „vollständiges System zueinander orthogonaler Eigenformen“. Es kann natürlich verschiedene solche Systeme geben, jedoch folgt unmittelbar aus ihrer Definition, daß je zwei von ihnen durch eine eineindeutige orthogonale Transformation aus einander hervorgehen:

$$L'_\mu(x) = \sum_{(\nu)} o_{\mu\nu} L_\nu(x), \quad L_\nu(x) = \sum_{(\mu)} o_{\mu\nu} L'_\mu(x).$$

Speziell enthalten diese Systeme also alle die gleiche endliche Anzahl, oder

alle abzählbar unendlichviele Formen — wodurch die *Vielfachheit* des Eigenwertes λ definiert ist.

Alle diese Entwicklungen übertragen sich unmittelbar auch auf den bisher ausgeschlossenen eventuellen *Eigenwert Null*, indem man die Definitionsgleichung $KL(x) = 0$ der zugehörigen Eigenformen in

$$(K + E)L(x) = L(x)$$

umschreibt; also stimmen die sämtlichen zum Eigenwert 0 gehörigen Eigenformen der Form K mit den sämtlichen zum Eigenwert 1 gehörigen der Form $K + E$ überein.

Das Resultat dieser Betrachtung ist:

Zu jedem Eigenwert einer reellen beschränkten quadratischen Form gibt es ein bis auf eineindeutige orthogonale Transformationen in sich bestimmtes vollständiges System zueinander orthogonaler Eigenformen, dessen lineare Kombinationen (mit beliebigen Koeffizienten von konvergenter Quadratsumme) die sämtlichen Eigenformen für diesen Eigenwert umfassen. Die Anzahl seiner Formen, die endlich oder auch abzählbar unendlich sein kann, heißt die Vielfachheit des Eigenwertes λ .

Ich fasse jetzt weiterhin *verschiedene Eigenwerte* ins Auge, um ihre Gesamtheit — das sog. *Punktspektrum der quadratischen Form* — übersehen zu können. Es seien λ_1, λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte, zu denen die Eigenformen $L^{(1)}(x), L^{(2)}(x)$ gehören:

$$(6^a.) \quad KL^{(1)}(x) = \lambda_1 L^{(1)}(x) \quad \text{oder} \quad \sum_{(q)} k_{pq} l_q^{(1)} = \lambda_1 l_p^{(1)}, \quad (p=1, 2, \dots)$$

$$(6^b.) \quad KL^{(2)}(x) = \lambda_2 L^{(2)}(x) \quad \text{oder} \quad \sum_{(q)} k_{pq} l_q^{(2)} = \lambda_2 l_p^{(2)}. \quad (p=1, 2, \dots)$$

Multiplizieren wir (6^{a.}) mit $l_p^{(2)}$, (6^{b.}) mit $l_p^{(1)}$ und summieren jedesmal über p , so werden die linken Seiten wegen der Symmetrie von K ($k_{pq} = k_{qp}$) einander gleich und es folgt:

$$\lambda_1 \sum_{(p)} l_p^{(1)} l_p^{(2)} = \lambda_2 \sum_{(p)} l_p^{(1)} l_p^{(2)},$$

und wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\sum_{(p)} l_p^{(1)} l_p^{(2)} = (L^{(1)}, L^{(2)}) = 0.$$

Eigenformen, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind also zueinander orthogonal. Da es nun nur abzählbar unendlichviele Orthogonalformen geben kann (§ 1, S. 220), so folgt unmittelbar das wichtige Theorem, daß *jede beschränkte quadratische Form höchstens abzählbar unendlichviele Eigenwerte besitzt.* Nehmen wir für jeden dieser Eigenwerte das vollständige System seiner orthogonalisierten Eigenformen nach dem vorigen Satze, so erhalten wir das *vollständige System aller überhaupt zu $K(x)$ gehörigen Eigenformen* als ein System zueinander orthogonaler Linearformen.

Wir bezeichnen nun alle diese verschiedenen Eigenformen, in eine einfache Reihe geordnet, mit $L_1(x), L_2(x), \dots$, und die zugehörigen Eigenwerte entsprechend mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, wobei unter diesen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ein und derselbe Wert endlich oder gar abzählbar unendlich oft auftreten kann. Da alle λ_ν unterhalb einer endlichen Grenze liegen müssen (S. 224) und da $\sum_{(\nu)} L_\nu(x)^2$ stets konvergiert und unterhalb $\sum_{(p)} x_p^2$ bleibt, konvergiert auch $\sum_{(\nu)} \lambda_\nu L_\nu(x)^2$ absolut und man erkennt leicht, daß es eine beschränkte quadratische Form (im Sinne von § 1, (4.)), darstellt. Wiederholen wir also den oben (S. 225 f. f.) für einen Eigenwert angewendeten Prozeß nun unverändert für alle Eigenwerte, und setzen

$$(7.) \quad K(x) = \lambda_1 L_1(x)^2 + \lambda_2 L_2(x)^2 + \dots + K_0(x),$$

wo

$$(7^a.) \quad (L_\nu, L_\mu) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad K L_\nu(x) = \lambda_\nu L_\nu(x), \quad K_0 L_\nu(x) = 0,$$

so wird $K_0(x)$ eine beschränkte quadratische Form, die außer $\lambda = 0$ keinen einzigen Eigenwert mehr hat. Dann und nur dann, wenn $K_0(x)$ identisch verschwindet, bilden, wie man leicht sieht, diese L_1, L_2, \dots ein „vollständiges“ Orthogonalsystem im früher (S. 220) definierten Sinne.

Indem man $K_0 = 0$ annimmt, kann man gemäß der Darstellung (7.) sofort *Beispiele quadratischer Formen bilden, die eine ganz beliebige, nur innerhalb endlicher Grenzen gelegene abzählbare Menge reeller λ -Werte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ zu Eigenwerten haben*; man braucht unter Verwendung irgendeines vollständigen Orthogonalsystems, beispielsweise des einfachsten möglichen $L_\nu(x) = x_\nu$, nur zu setzen:

$$K(x) = \lambda_1 L_1(x)^2 + \lambda_2 L_2(x)^2 + \dots = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots$$

Beispielsweise können die λ_ν die Menge aller rationalen Punkte eines endlichen Intervalles sein, wobei jeder Punkt noch beliebig vielfach verwendet werden kann.

Kapitel II.

Untersuchung des Streckenspektrums.

§ 3.

Formen ohne Punktspektrum.

Wir haben uns nunmehr mit der Untersuchung der Restform $K_0(x)$ zu beschäftigen, und ich führe zunächst als einfaches Beispiel*) für eine solche *beschränkte nicht identisch verschwindende Form ohne einen einzigen Eigenwert* die Form an:

$$K(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots$$

Man kann nämlich die zugehörigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_2 - \lambda x_1 &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{2} (x_{p+1} + x_{p+1}) - \lambda x_p &= 0 \end{aligned} \qquad (p=2, 3, \dots)$$

sofort sukzessive auflösen und erkennt leicht, daß im Falle $|\lambda| \geq 1$ die

*) Siehe *Hilbert* IV, S. 208.

sich so ergebenden x_1, x_2, \dots immer größer werden und daher keine konvergente Quadratsumme haben können. Ist aber $|\lambda| < 1$, so setze man etwa:

$$\lambda = \cos t \quad \text{und} \quad x_1 = c \sin t,$$

und findet dann nach bekannten trigonometrischen Formeln

$$x_2 = 2 \cos t \cdot c \cdot \sin t = c \sin 2t,$$

$$x_3 = 2 \cos t \cdot c \cdot \sin 2t - c \sin t = c \sin 3t,$$

und schließlich allgemein:

$$x_p = c \sin pt; \quad (p=1, 2, \dots)$$

aus dieser Darstellung ergibt sich leicht, daß $\sum_{(p)} x_p^2$ stets divergiert.

Man bemerkt nun jedoch, daß diese x_p eine *andere Konvergenzbedingung* erfüllen, die einen verwandten und doch wesentlich verschiedenen Charakter hat; es ist nämlich eine bekannte Eigenschaft der trigonometrischen Funktionen wie überhaupt jedes Orthogonalsystems, daß die *Quadratsumme ihrer Integrale*

$$\sum_{(p)} \left(\int_0^t \sin pt \, dt \right)^2$$

konvergiert. Dies gibt den Anlaß, auch allgemein nunmehr solche Lösungen $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \dots$ der homogenen Gleichungen

$$(1.) \quad \sum_{(q)} k_{pq} \varphi_q(\lambda) = \lambda \varphi_p(\lambda) \quad (p=1, 2, \dots)$$

als Funktionen des kontinuierlich veränderlichen Parameters λ zu suchen, für die lediglich die Quadratsumme der Integrale nach λ

$$(2.) \quad \sum_{(p)} \left(\int_0^\lambda \varphi_p(\lambda) \, d\lambda \right)^2$$

konvergiert; man wird in ihnen einen Ersatz für die event. fehlenden Eigenformen, bzw. in der Gesamtheit der Werte λ , für die solche Lösungen existieren, einen Ersatz für die Eigenwerte vermuten dürfen. Dazu wäre zunächst nötig, daß jene Bedingung orthogonalen Transformationen gegenüber invariant ist, d. h. daß mit den $\varphi_p(\lambda)$ auch die durch eine orthogonale Transformation aus ihnen hervorgehenden Funktionen

$$(3.) \quad \psi_p(\lambda) = \sum_{(q)} o_{pq} \varphi_q(\lambda)$$

die gleiche Eigenschaft haben. Hier tritt sofort eine *charakteristische Schwierigkeit* auf. Da $\sum_{(q)} \varphi_q(\lambda)^2$ im allgemeinen *nicht* konvergiert, und die Größen o_{p1}, o_{p2}, \dots einer Zeile des orthogonalen Schemas schließlich willkürliche Größen von nur konvergenter Quadratsumme sind, so wird die Reihe für ψ_p im allgemeinen gar nicht konvergieren und auch an den Stellen, wo sie etwa konvergiert, keine im gewöhnlichen Sinne integrierbare Funktion darstellen. Wohl aber folgt, falls die Reihen (3.) etwa gleichmäßig konvergieren, unmittelbar, daß die Größen $\int_0^\lambda \psi_p(\lambda) d\lambda$ aus den $\int_0^\lambda \varphi_p(\lambda) d\lambda$ — d. s. Größen von konvergenter Quadratsumme — durch die gleiche orthogonale Transformation (3.) entstehen, und daß daher ihre Quadratsumme tatsächlich konvergiert. Man könnte freilich versuchen, auch im allgemeinen Falle mit dem *Lebesgueschen* Integralbegriff auszukommen, jedoch würden auch da noch wesentliche Schwierigkeiten offen bleiben, und vor allem würden kompliziertere Untersuchungen über Entwicklung nach trigonometrischen und allgemeineren Orthogonalfunktionen nötig werden, wie sie dem Wesen des hier behandelten Problems durchaus nicht gemäß sind.

Man kann aber allen diesen Unzuträglichkeiten aus dem Wege gehen, wenn man in konsequenter Weise ausschließlich die *Integrale* der bisher genannten Lösungen $\varphi_p(\lambda)$ betrachtet, wobei sich dann einige einfache und für die vorliegenden Zwecke sehr bequem zu handhabende Verallgemeinerungen des Integralbegriffes als zweckmäßig ergeben werden. Wir werden nämlich statt der Gleichungen (1.) die durch gliedweise Integration aus ihnen entstehenden Gleichungen

$$(4.) \quad \sum_{(q)} k_{pq} \int_0^\lambda \varphi_q(\lambda) d\lambda = \int_0^\lambda \lambda \varphi_p(\lambda) d\lambda \quad (p=1, 2, \dots)$$

betrachten; durch eine leichte Umformung der rechten Seiten wird es gelingen, sie allein als Bedingungen für die Integralfunktionen

$$(5.) \quad \varrho_p(\lambda) = \int_0^\lambda \varphi_p(\lambda) d\lambda$$

zu schreiben, und wir haben dann in ihnen Gleichungen für diese Funktionen, die unter der Bedingung der Konvergenz von $\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)^2$ zu lösen sind.

Die hierin liegende Verschiebung der Fragestellung ist *berechtigt*, da es ja in erster Linie nicht auf die Lösungen der Gleichungen (1.) ankommt, sondern auf die Wertintervalle λ , in denen solche nicht identisch verschwindende Lösungen $\varphi_p(\lambda)$ bzw. nicht durchweg konstante $\varrho_p(\lambda)$ möglich sind; sie ist aber auch *nützlich*, da wir es nun statt mit den möglicherweise äußerst unstetigen Funktionen $\varphi_p(\lambda)$ mit *stetigen Funktionen* $\varrho_p(\lambda)$, die sogar von beschränkter Schwankung sind, zu tun haben werden. Überdies ließe sich zeigen, daß man stets nachträglich unter Verwendung der *Lebesgueschen* Begriffe leicht zu den Differentialquotienten $\varphi_p(\lambda)$ der gefundenen $\varrho_p(\lambda)$ übergehen kann, und zwar erfüllen diese dann — wie sich leicht ergibt — die Gleichungen (1.) im Sinne der „Äquivalenz“ oder „mittleren Konvergenz“*) d. h. das Integral des Quadrates des Restes der links stehenden Reihen konvergiert gegen Null.

Ich will nun zunächst, bevor wir diesen Gedankengang durchführen, einige dabei notwendige eigenartige *Integrationsprozesse* nebst ihren einfachen Eigenschaften kurz ohne Beweis zusammenstellen, so wie ich sie bereits in meiner Dissertation**) benutzt habe.

§ 4.

Hilfssätze über gewisse Integrale.

Eine Funktion $\varrho(\lambda)$ einer reellen Variablen λ nenne ich, wie üblich, *monoton wachsend* oder kurzweg *monoton*, wenn für $\lambda_1 > \lambda_2$ stets $\varrho(\lambda_1) \geq \varrho(\lambda_2)$

*) *E. Fischer*, „Sur la convergence en moyenne“. C. R. de l'Acad. des Sciences. Paris. T. 144 (1907), S. 1022.

**) Siehe besonders § 5 (S. 25—31).

ist (streckenweises Konstantbleiben ist also nicht ausgeschlossen). Die Differenz zweier monotoner Funktionen $\varrho_1(\lambda) - \varrho_2(\lambda) = f(\lambda)$ heißt nach Herrn C. Jordan*) eine Funktion von beschränkter Schwankung (*à variation bornée*); sie hat die charakteristische Eigenschaft, daß die für jede beliebige Einteilung eines Intervalles $a \leq \lambda \leq b$ durch endlichviele Punkte $\lambda_0 = a, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n = b$ gebildete Summe der Beträge der Zuwächse von Punkt zu Punkt:

$$\sum_{i=1}^n |\Delta_i f(\lambda)| = \sum_{i=1}^n |f(\lambda_i) - f(\lambda_{i-1})|$$

unter einer festen von der Wahl der Einteilung unabhängigen Grenze bleibt. Ist $f(x)$ obendrein noch stetig, so hat diese Summe für jede Folge solcher Teilungen, deren größtes Intervall gegen Null konvergiert — d. h. genau bei dem das gewöhnliche Integral definierenden Grenzprozeß — einen wohlbestimmten von der speziell verwendeten Teilungsfolge unabhängigen Grenzwert, den man passend durch

$$(1.) \quad \int_a^b |df(\lambda)| = \lim_{\Delta_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\Delta_i f(\lambda)|$$

bezeichnet und Gesamtschwankung von $f(x)$ im Intervall (a, b) nennt; er ist eine stetige Funktion der oberen Grenze b^{**}).

Ist nun $u(\lambda)$ irgend eine weitere stetige endliche Funktion und wählt man bei dem beschriebenen Grenzprozeß in jedem Intervalle $\lambda_{i-1} \leq \lambda \leq \lambda_i$ irgendeinen Wert u_i dieser Funktion, so folgt aus der Existenz von (1.) unmittelbar auch die Existenz des folgenden im gleichen Sinne zu verstehenden integralartigen Grenzwertes***):

$$(2.) \quad \lim_{\Delta_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n u_i \Delta_i f(\lambda) = \int_a^b u(\lambda) df(\lambda);$$

*) Cours d'analyse. 2. éd. (Paris 1893), S. 54 ff.

**) Beweis bei Lebesgue, Leçons sur l'intégration, (Paris 1904), S. 52 ff.

***) Solche Integrale wurden bei verwandten Untersuchungen schon früher benutzt, besonders von Stieltjes, „Recherches sur les fractions continues“. (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse T. VIII (1894) = Mém. prés. par div. sav. à l'Acad. des Sciences. Paris. T. XXXII. No. 2.)

er stellt eine stetige Funktion beschränkter Schwankung der oberen Grenze dar. Ist $u(\lambda)$ selbst gleichfalls von beschränkter Schwankung, so folgt leicht die Formel der „Produktintegration“:

$$(3.) \quad \int_a^b u(\lambda) df(\lambda) = [u(\lambda) f(\lambda)]_a^b - \int_a^b f(\lambda) du(\lambda).$$

Ist von $f(\lambda)$ nur Stetigkeit bekannt, so kann diese Formel zur Definition des linken Integrales dienen.

Ist speziell in einem ganzen Intervalle $u(\lambda) \geq m > 0$, so leitet man aus (2.) oder (3.) ohne wesentliche Schwierigkeit die Umkehrungsformel her:

$$(4.) \quad f(\lambda) - f(a) = \int_a^\lambda \frac{dF(\lambda)}{u(\lambda)} = \frac{F(\lambda)}{u(\lambda)} + \int_a^\lambda \frac{F(\lambda) du(\lambda)}{u(\lambda)^2},$$

wo $F(\lambda) = \int_a^\lambda u(\lambda) df(\lambda).$

Übrigens kann man jedes Integral (2.) als Differenz zweier gewöhnlicher Integrale entsprechend der Zerlegung von $f(\lambda)$ in die Differenz zweier monotoner Funktionen $\varrho(\lambda)$ darstellen. Denn die Inverse $\lambda = \lambda(\varrho)$ besitzt höchstens abzählbar unendlichviele (den Konstanzintervallen von $\varrho(\lambda)$ entsprechende) Unstetigkeitsstellen; daher existiert $\int_{\varrho(a)}^{\varrho(b)} u(\lambda(\varrho)) d\varrho$ im gewöhnlichen Sinne und ist offenbar gleich $\int_a^b u(\lambda) d\varrho(\lambda).$

Wesentlich über den Rahmen dieser Begriffe hinaus geht jedoch ein weiterer zuerst in meiner Dissertation aufgestellter *integralartiger Grenzprozeß*, den wir im folgenden brauchen werden. Es seien $g(\lambda), h(\lambda), h_1(\lambda)$ monotone, endliche und stetige Funktionen, und $f(\lambda), f_1(\lambda)$ zwei weitere Funktionen, für deren Zuwächse in einem jeden betrachteten Teilintervalle Δ die Ungleichungen

$$(5.) \quad (\Delta f)^2 \leq \Delta g \Delta h, \quad (\Delta f_1)^2 \leq \Delta g \Delta h_1$$

gelten. Dann*) ist $f(\lambda)$ notwendig stetig und von beschränkter Schwankung, und es existieren für jede Folge von Teilungen des Intervalles (a, b) in eine wachsende Anzahl gleichmäßig immer kleiner werdender Intervalle $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ — d. h. wiederum genau bei dem das gewöhnliche Integral definierenden Grenzprozesse — die wohlbestimmten, von der speziell verwendeten Teilungsfolge unabhängigen Grenzwerte („Integrale“):

$$(5^a.) \quad \int_{\mathcal{A}_i=0} \sum_{i=1}^n \frac{(\mathcal{A}_i f(\lambda))^2}{\mathcal{A}_i g(\lambda)} = \int_a^b \frac{df(\lambda)^2}{dg(\lambda)},$$

$$(5^b.) \quad \int_{\mathcal{A}_i=0} \sum_{i=1}^n \frac{\mathcal{A}_i f(\lambda) \mathcal{A}_i f_1(\lambda)}{\mathcal{A}_i g(\lambda)} = \int_a^b \frac{df(\lambda) df_1(\lambda)}{dg(\lambda)}.$$

Dabei sind event. Konstanzintervalle $\mathcal{A}_i g = 0$, in denen wegen (5.) auch $\mathcal{A}_i f = 0$ ist, nicht zu berücksichtigen. Diese Integrale sind nun als Funktionen der oberen Grenze stetig und sogar von beschränkter Schwankung, und es gelten die Ungleichungen:

$$(6^a.) \quad \frac{(f(a) - f(b))^2}{g(a) - g(b)} \leq \int_a^b \frac{df(\lambda)^2}{dg(\lambda)} \leq h(b) - h(a),$$

$$(6^b.) \quad \left\{ \int_a^b \frac{df(\lambda) df_1(\lambda)}{dg(\lambda)} \right\}^2 \leq \int_a^b \frac{df(\lambda)^2}{dg(\lambda)} \int_a^b \frac{df_1(\lambda)^2}{dg(\lambda)} \leq (h(b) - h(a)) (h_1(b) - h_1(a)).$$

Setzt man an Stelle von (5.) nur voraus, daß die Summen (5^{a.}) sämtlich unter einer endlichen Grenze bleiben, so kann man das Integral (5^{a.}) als ihren Limes superior definieren; man kann jedoch — falls nur $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ stetig sind — leicht zeigen, daß auch dann das Integral genau im oben angeführten Sinne als eigentlicher Grenzwert und mit genau den gleichen Eigenschaften existiert**).

*) Siehe Dissert. S. 27—29.

***) Zum Beweise bemerke man, daß der Limes superior jedenfalls eine monotone Funktion $h(b)$ der oberen Grenze darstellt, für die $(\mathcal{A}f)^2 \leq \mathcal{A}g \mathcal{A}h$ gilt; bildet man nun durch Subtraktion der (höchstens abzählbar unendlichvielen) Sprünge aus $h(\lambda)$ eine stetige Funktion $h_s(\lambda)$, so folgt durch einfache Abschätzungen auf Grund der Schwarz-schen Ungleichung, daß auch $(\mathcal{A}f)^2 \leq \mathcal{A}g \mathcal{A}h_s$ ist, d. h. die Bedingung (5.) ist tatsächlich erfüllt.

Durch Kombination der Begriffe (2.) und (5.) erhält man weiterhin die Existenz der Grenzwerte*)

$$(7.) \quad \int_{\Delta_i=0} \sum_{i=1}^n u_i \frac{\Delta_i f(\lambda) \Delta_i f_1(\lambda)}{\Delta_i g(\lambda)} = \int_a^b u(\lambda) \frac{df(\lambda) df_1(\lambda)}{dg(\lambda)}$$

$$= \int_a^b u(\lambda) d \int_a^\lambda \frac{df(\lambda) df_1(\lambda)}{dg(\lambda)}.$$

Endlich sei noch die Bemerkung nachgetragen, daß, falls die Funktionen f, g, \dots stetig differenzierbar sind, die Integrale (2.), (3.), (5.), (7.) in unmittelbar ersichtlicher Weise in gewöhnliche Integrale der Differentialquotienten dieser Funktionen bzw. von Produkten oder Quotienten aus ihnen übergehen.

Wir werden diese Begriffe in der Folge besonders in ganz bestimmtem Zusammenhange anzuwenden haben. Es seien $\varrho_1(\lambda), \varrho_2(\lambda), \dots$ stetige Funktionen, derart daß $\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)^2$ konvergiert und eine stetige, endliche Funktion von λ darstellt. Dann konvergiert die beschränkte Linearform

$$(8.) \quad P(\lambda; x) = \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) x_p$$

für jedes Wertsystem der x_p von konvergenter Quadratsumme gleichmäßig in λ (§ 1, S. 215) und stellt daher eine stetige Funktion dar, deren Integral durch gliedweise Integration gewonnen werden kann; für jede Funktion $u(\lambda)$ von beschränkter Schwankung folgt daher

$$\int_a^\lambda P(\lambda; x) du(\lambda) = \sum_{(p)} x_p \int_a^\lambda \varrho_p(\lambda) du(\lambda),$$

oder durch Anwendung von (3.):

*) Siehe Dissert. S. 60.

$$(9.) \quad \int_a^\lambda u(\lambda) dP(\lambda; x) = \sum_{(p)} x_p \int_a^\lambda u(\lambda) d\varrho_p(\lambda),$$

und das eine wie das andere Integral stellt offenbar eine beschränkte Linearform dar.

Wir fügen nun die Annahme hinzu, daß — unter $\varrho_0(\lambda)$ eine bestimmte monotone Funktion verstanden — die Integrale $\int_a^b \frac{(dP(\lambda; x))^2}{d\varrho_0(\lambda)}$ existieren und für alle der Ungleichung $\sum_{(p)} x_p^2 \leq 1$ genügenden Wertsysteme unterhalb 1 bleiben. Ist dann $f(\lambda)$ irgendeine Funktion, für die $\int_a^b \frac{df^2}{d\varrho_0}$ existiert, so ist stets

$$(10.) \quad \int_a^b \frac{df(\lambda) dP(\lambda; x)}{d\varrho_0(\lambda)} = \sum_{(p)} x_p \int_a^b \frac{df(\lambda) d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)}$$

eine beschränkte Linearform der x_p . Denn für eine Einteilung des Intervalles (a, b) in n Teile $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ist jedenfalls

$$(10a.) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i f(\lambda) \Delta_i P(\lambda; x)}{\Delta_i \varrho_0(\lambda)} = \sum_{(p)} x_p \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i f(\lambda) \Delta_i \varrho_p(\lambda)}{\Delta_i \varrho_0(\lambda)}$$

eine beschränkte, nach (6.) unterhalb $\left(\int_a^b \frac{df^2}{d\varrho_0} \int_a^b \frac{dP^2}{d\varrho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b \frac{df^2}{d\varrho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$ bleibende Form der x_p ; also muß die Quadratsumme der Koeffizienten unterhalb $\int_a^b \frac{df^2}{d\varrho_0}$ bleiben. Da nun obendrein bei gleichmäßiger Verkleinerung der Teilintervalle für jedes p

$$\lim_{\substack{\Delta_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i f(\lambda) \Delta_i \varrho_p(\lambda)}{\Delta_i \varrho_0(\lambda)} = \int_a^b \frac{df(\lambda) d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)}$$

existiert, so kann für jedes feste Wertsystem der x_p nach (3.) des § 1 der

Grenzwert der rechten Seite von (10^a.) gliedweise gebildet werden, womit tatsächlich (10.) folgt.

Mit Hilfe von (9.) und (7.) folgt aus (10.) unmittelbar

$$(11.) \quad \int_a^b u(\lambda) \frac{df(\lambda) dP(\lambda; x)}{d\varrho_0(\lambda)} = \sum_{(p)} x_p \int_a^b u(\lambda) \frac{df(\lambda) d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)};$$

durch zweimalige Anwendung dieser Formel ergibt sich, daß

$$(12.) \quad \int_a^b u(\lambda) \frac{(dP(\lambda; x))^2}{d\varrho_0(\lambda)} = \sum_{(p, q)} x_p x_q \int_a^b u(\lambda) \frac{d\varrho_p(\lambda) d\varrho_q(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)}$$

eine beschränkte quadratische Form der x_p darstellt, für die die zugehörige Bilinearform bzw. die Faltung mit einer Linearform $L(x)$ gegeben ist durch

$$(12^a.) \quad \int_a^b u(\lambda) \frac{dP(\lambda; x) dP(\lambda; y)}{d\varrho_0(\lambda)} \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b u(\lambda) \frac{dP(\lambda; x) d(P(\lambda), L)}{d\varrho_0(\lambda)}.$$

§ 5.

Eigenschaften der Differentiallösungen.

Mit diesen Hilfsmitteln knüpfen wir nun an die Fragestellung des § 3 an. Wir fragen nach solchen abzählbar unendlichvielen stetigen Funktionen $\varrho_1(\lambda), \varrho_2(\lambda), \dots$ des reellen Parameters λ , für deren Zuwächse $\Delta\varrho_p = \varrho_p(\lambda_2) - \varrho_p(\lambda_1)$ in jedem Intervalle $\mathcal{A} = (\lambda_1, \lambda_2)$ die unendlichvielen Gleichungen

$$(1.) \quad \sum_{(q)} k_{pq} \Delta\varrho_q(\lambda) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda d\varrho_p(\lambda) = 0 \quad (p=1, 2, \dots)$$

bestehen, und deren Quadratsumme obendrein gegen eine stetige endliche

Funktion von λ konvergiert:

$$(2.) \quad \sum_{(p)} (\varrho_p(\lambda))^2 = \varrho_0(\lambda).$$

Das entspricht tatsächlich genau den Gleichungen (4.), (5.) des § 3, denn wenn $\frac{d\varrho_p}{d\lambda} = \varphi_p(\lambda)$ speziell als stetige Funktion existiert, geht (1.) nach der Bemerkung von S. 238 genau in (4.) über. Natürlich ist dadurch jedes $\varrho_p(\lambda)$ höchstens bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt, die wir etwa so normieren können, daß für $\lambda = 0$ alle $\varrho_p(\lambda)$ verschwinden.

Nun ergibt sich leicht, daß die Intervalle \mathcal{A} der λ -Achse, in denen die Lösungen $\mathcal{A}\varrho_p$ von (1.) nicht sämtlich verschwinden, einen *orthogonal invarianten Charakter* haben. Denn multiplizieren wir die Gleichungen (1.) mit Variablen x_p von konvergenter Quadratsumme, summieren über p und führen wieder die beschränkten Linearformen

$$(3.) \quad P(\lambda; x) = \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) x_p, \quad \mathcal{A}P(\lambda; x) = \sum_{(p)} \mathcal{A}\varrho_p(\lambda) x_p$$

ein, so folgt unter Berücksichtigung von (9.) des § 4 und unter Benutzung der Faltungssymbole des § 1 (S. 216):

$$(4.) \quad K \mathcal{A}P(\lambda; x) - \int_{(\mathcal{A})} \lambda dP(\lambda; x) = 0.$$

Aus der Kovarianz des Faltungsprozesses bei orthogonaler Transformation (§ 1, (13.)) folgt nun unmittelbar, daß für eine orthogonal transformierte Form $K'(x')$ die Koeffizienten ϱ'_p der durch die gleiche Transformation aus $P(\lambda; x)$ hervorgehenden Form $P'(\lambda; x')$ Lösungen der entsprechenden Gleichungen sind; da wegen der Orthogonalität der Transformation jedenfalls $\sum_{(p)} \mathcal{A}\varrho_p^2 = \sum_{(p)} \mathcal{A}\varrho_p'^2$ ist, so unterliegen sie der gleichen Konvergenzbedingung (2.) und verschwinden dann und nur dann für ein Intervall \mathcal{A} sämtlich, wenn alle $\mathcal{A}\varrho_p = 0$ sind.

Es erweist sich nun bequem, statt von dem System der Zuwächse $\Delta \varrho_p(\lambda)$ bzw. der Linearformen $\Delta P(\lambda; x)$ für alle möglichen Intervalle Δ der λ -Achse symbolisch von den „Differentialen“ $d\varrho_p(\lambda)$ bzw. den „linearen Differentialformen“ $dP(\lambda; x) = \sum_{(p)} d\varrho_p(\lambda) x_p$ zu sprechen*), die wir beschränkt nennen, insofern die Konvergenzbedingung (2.) erfüllt ist. Demgemäß schreiben wir an Stelle von (1.) und (4.)

$$(1'.) \quad \sum_{(q)} k_{pq} d\varrho_q(\lambda) - \lambda d\varrho_p(\lambda) = 0, \quad (p=1, 2, \dots)$$

$$(4'.) \quad K dP(\lambda; x) - \lambda dP(\lambda; x) = 0,$$

und sagen kurz, die Differentiale $d\varrho_p(\lambda)$ genügen den gewöhnlichen homogenen zu $K - \lambda E$ gehörigen Gleichungen, bzw. die Differentialform $dP(\lambda; x)$ ist eine zum Werte λ gehörige „Eigendifferentialform“ von $K(x)$; natürlich soll das lediglich ein kurzer Ausdruck für den durch (1.) bzw. (4.) dargestellten Sachverhalt sein; denn im allgemeinen braucht ja der Differentialquotient $\frac{d\varrho_p}{d\lambda}$ oder gar $\frac{dP}{d\lambda}$ nicht zu existieren, und einen eigentlichen Sinn haben eben nur die integrierten Gleichungen (1.) (vgl. § 3). Wir sagen, daß $dP(\lambda; x)$ an einer Stelle λ identisch verschwindet, wenn für jedes sie einschließende Intervall $\Delta P(\lambda; x)$ identisch verschwindet. Dann ergeben unsere bisherigen Betrachtungen offenbar, daß die Gesamtheit der Stellen, für die $K(x)$ nicht identisch verschwindende beschränkte Eigendifferentialformen besitzt, allen orthogonalen Transformationen gegenüber invariant ist; diese Punktmenge, die, wie sich zeigen wird, die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt, heißt nach Herrn Hilbert, der ihre Existenz zuerst nachgewiesen hat**), Streckenspektrum oder kontinuierliches Spektrum der Form K .

Wir leiten nun die fundamentale Eigenschaft der Eigendifferentialformen her, die der Orthogonalität der zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenformen entspricht***). Wir betrachten die zwei getrennt

*) Vgl. meine Dissertat. S. 21, 74.

**) Hilbert IV, S. 172.

***) Einen analogen Beweis gibt Herr Weyl (Math. Ann. 66, S. 296) gelegentlich der Übertragung des bereits in meiner Dissertation aufgestellten Begriffs der Differentiallösungen auf Integralgleichungen.

liegenden Intervalle $(0, \lambda_1)$ und (μ_1, μ_2) des Streckenspektrums:

$$0 < \lambda_1 < \mu_1 < \mu_2,$$

für die die Gleichungssysteme gelten:

$$\sum_{(q)} k_{pq} \varrho_q(\lambda_1) = \int_0^{\lambda_1} \lambda d\varrho_p(\lambda), \quad (p=1, 2, \dots)$$

$$\sum_{(q)} k_{pq} \{\varrho_q(\mu_2) - \varrho_q(\mu_1)\} = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu d\varrho_p(\mu). \quad (p=1, 2, \dots)$$

Indem wir sie mit $\{\varrho_p(\mu_2) - \varrho_p(\mu_1)\}$ bzw. $\varrho_p(\lambda_1)$ multiplizieren und über p summieren, erhalten wir wegen der Symmetrie von K (die Vertauschung der Summationsfolge links ist erlaubt, da die ϱ_p Wertssysteme von konvergenter Quadratsumme sind):

$$\sum_{(p)} \{\varrho_p(\mu_2) - \varrho_p(\mu_1)\} \int_0^{\lambda_1} \lambda d\varrho_p(\lambda) = \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda_1) \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu d\varrho_p(\mu).$$

Führen wir nun die Faltung der beiden Formen $P(\lambda; x), P(\mu; x)$ ein:

$$(5.) \quad \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) \varrho_p(\mu) = E(\lambda, \mu),$$

so geht die letzte Gleichung nach (9.) des § 4 über in

$$(6.) \quad \int_0^{\lambda_1} \lambda d_\lambda \{E(\lambda, \mu_2) - E(\lambda, \mu_1)\} = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu d_\mu E(\lambda_1, \mu),$$

wo der Index am Differentiationszeichen die Variable anzeigt, nach der integriert werden soll. Nach (3.) des § 4 und unter Benutzung des gewöhnlichen Mittelwertsatzes der Integralrechnung können wir die rechte Seite umformen in

$$\begin{aligned} & \mu_2 E(\lambda_1, \mu_2) - \mu_1 E(\lambda_1, \mu_1) - \int_{\mu_1}^{\mu_2} E(\lambda_1, \mu) d\mu \\ & = \mu_2 \{E(\lambda_1, \mu_2) - E(\lambda_1, \mu_1)\} + (\mu_2 - \mu_1) \{E(\lambda_1, \mu_1) - E(\lambda_1, \bar{\mu})\}, \end{aligned}$$

wo $\bar{\mu}$ einen Wert zwischen μ_1 und μ_2 bezeichnet. Damit geht (6.) über in

$$\int_0^{\lambda_1} (\mu_2 - \lambda) d_\lambda \left\{ \frac{E(\lambda, \mu_2) - E(\lambda, \mu_1)}{\mu_2 - \mu_1} \right\} = E(\lambda_1, \bar{\mu}) - E(\lambda_1, \mu_1),$$

und hieraus folgt, da im ganzen Integrationsintervalle $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ der Faktor $\mu_2 - \lambda \geq \mu_2 - \lambda_1 > 0$ bleibt, nach (4.) des § 4:

$$\begin{aligned} (7.) \quad \frac{E(\lambda_1, \mu_2) - E(\lambda_1, \mu_1)}{\mu_2 - \mu_1} &= \int_0^{\lambda_1} \frac{d_\lambda \{E(\lambda, \bar{\mu}) - E(\lambda, \mu_1)\}}{\mu_2 - \lambda} \\ &= \frac{E(\lambda_1, \bar{\mu}) - E(\lambda_1, \mu_1)}{\mu_2 - \lambda_1} - \int_0^{\lambda_1} \frac{\{E(\lambda, \bar{\mu}) - E(\lambda, \mu_1)\} d\lambda}{(\mu_2 - \lambda)^2}. \end{aligned}$$

Nun führt eine einfache Abschätzung zum Ziele. Es ist nämlich nach der *Schwarzschen* Ungleichung:

$$\{E(\lambda, \bar{\mu}) - E(\lambda, \mu_1)\}^2 \leq \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)^2 \sum_{(p)} \{\varrho_p(\bar{\mu}) - \varrho_p(\mu_1)\}^2;$$

aus der Tatsache, daß jedes einzelne $\varrho_p(\mu)$ und $\sum_{(p)} \varrho_p(\mu)^2$ stetige Funktionen von μ sind, folgert man ganz leicht, daß der zweite Faktor rechts beliebig klein wird, wenn $\bar{\mu}$ gegen μ_1 konvergiert, und daher wird dann auch $E(\lambda, \bar{\mu}) - E(\lambda, \mu_1)$ unabhängig von λ beliebig klein. Also folgt aus (7.), da $\bar{\mu}$ gleichzeitig mit μ_2 gegen μ_1 konvergiert und $\frac{1}{\mu_2 - \lambda}$ stets unterhalb einer endlichen Grenze bleibt:

$$\lim_{\mu_2 = \mu_1} \frac{E(\lambda_1, \mu_2) - E(\lambda_1, \mu_1)}{\mu_2 - \mu_1} = 0;$$

mit andern Worten, die Funktion $E(\lambda_1, \mu)$ von μ besitzt an jeder Stelle $\mu_1 > \lambda_1$ die Ableitung 0 nach μ , d. h. sie hat für alle diese Stellen bei festem λ_1 denselben von μ_1 unabhängigen Wert; da sie aber gewiß auch noch an der Stelle $\mu = \lambda_1$ eine stetige Funktion von μ darstellt, ist dieser Wert gleich $E(\lambda_1, \lambda_1)$. Wir haben also schließlich, da auch λ_1 eine willkürliche Stelle war, unter Berücksichtigung von (2.):

$$(8.) \quad E(\lambda, \mu) = \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) \varrho_p(\mu) = \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)^2 = \varrho_0(\lambda) \quad \text{für } \mu \geq \lambda.$$

Um die hiermit gewonnene charakteristische Eigenschaft übersichtlicher auszudrücken, schließen wir aus ihr zunächst für die Zuwächse $\mathcal{A}_1 \varrho_p(\lambda)$ in irgendeinem Intervalle $\lambda_1 \leq \lambda \leq \mu_1$:

$$(8^a.) \quad \sum_{(p)} (\mathcal{A}_1 \varrho_p)^2 = \sum_{(p)} \{\varrho_p(\mu_1) - \varrho_p(\lambda_1)\}^2 = \varrho_0(\mu_1) - 2\varrho_0(\lambda_1) + \varrho_0(\lambda_1) = \mathcal{A}_1 \varrho_0.$$

Ist ferner $\mathcal{A}_2 (\lambda_2 \leq \lambda \leq \mu_2)$ ein zweites ganz oberhalb \mathcal{A}_1 liegendes Intervall ($\mu_1 < \lambda_2$), so folgt ähnlich:

$$(8^b.) \quad \sum_{(p)} \mathcal{A}_1 \varrho_p \mathcal{A}_2 \varrho_p = \sum_{(p)} \{\varrho_p(\mu_1) - \varrho_p(\lambda_1)\} \{\varrho_p(\mu_2) - \varrho_p(\lambda_2)\} \\ = \varrho_0(\mu_1) - \varrho_0(\mu_1) - \varrho_0(\lambda_1) + \varrho_0(\lambda_1) = 0.$$

Bezeichnen wir endlich mit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei ganz beliebige Intervalle und mit $\mathcal{A}_{(1,2)}$ ihren gemeinsamen Teil, so erhalten wir aus (8^{a.}) und (8^{b.}) unmittelbar durch entsprechende Zerlegung der Differenzen $\mathcal{A}_1 \varrho_p, \mathcal{A}_2 \varrho_p$:

$$(9.) \quad \sum_{(p)} \mathcal{A}_1 \varrho_p \mathcal{A}_2 \varrho_p = (\mathcal{A}_1 \mathcal{P}, \mathcal{A}_2 \mathcal{P}) = \mathcal{A}_{(1,2)} \varrho_0,$$

wobei $\mathcal{A}_{(1,2)} \varrho_0 = 0$ ist, wenn $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ keinen Teil gemein haben. Hierin sind offenbar (8.), (8^{a.}), (8^{b.}) als Spezialfälle enthalten, und der bequemste Ausdruck der charakteristischen Eigenschaft ist damit gefunden.

Wir können (9.) als Eigenschaft der durch (4.) definierten Linearformen $\mathcal{A}P(\lambda; x)$ so aussprechen: *Die zu zwei getrennt liegenden Intervallen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ gehörigen (4.) genügenden Formen sind orthogonal, indessen sind sie so normiert, daß die Quadratsumme ihrer Koeffizienten nicht gleich 1, sondern gleich der zugehörigen Differenz der Funktion $\varrho_0(\lambda)$ ist:*

$$(9^a.) \quad (\mathcal{A}_1 P, \mathcal{A}_1 P) = \mathcal{A}_1 \varrho_0.$$

Mit der oben eingeführten symbolischen Sprechweise werden wir das kürzer als Eigenschaften der „Differentialformen“ $dP(\lambda; x)$ ausdrücken:

$$(10.) \quad (dP(\lambda), dP(\mu)) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \lambda \neq \mu, \\ d\varrho_0(\lambda), & \text{wenn } \lambda = \mu, \end{cases}$$

und werden demgemäß das System der Differentialformen $dP(\lambda; x)$ ein *System orthogonaler Differentialformen* sowie die für ihre Normierung maßgebende Funktion $\varrho_0(\lambda)$ seine *Basisfunktion* nennen. Unser Resultat ist dann, daß *die zu den verschiedenen Stellen des Streckenspektrums gehörigen Eigendifferentialformen einer beschränkten quadratischen Form zueinander orthogonal sind.*

Wir können im Anschluß hieran leicht zeigen, daß *das Streckenspektrum notwendig ganz im Endlichen und zwar zwischen Maximum und Minimum von $K(x)$ gelegen ist* — genau wie es für das Punktspektrum galt. Denn multiplizieren wir etwa die Gleichungen (1.) mit $\mathcal{A}\varrho_p(\lambda)$ und summieren über p , so folgt unter Berücksichtigung von (9.) des § 4 aus der Orthogonalitätseigenschaft (da $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$):

$$\sum_{(p, q)} k_{pq} \mathcal{A}\varrho_p \mathcal{A}\varrho_q = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda d\lambda \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) \mathcal{A}\varrho_p(\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda d\varrho_0(\lambda).$$

Nun steht links der Wert der quadratischen Form $K(x)$ für die Variablen $x_p = \mathcal{A}\varrho_p(\lambda)$, deren Quadratsumme $\mathcal{A}\varrho_0$ ist; die rechte Seite ist wegen der Monotonie von $\varrho_0(\lambda)$ gleich einem Mittelwerte $\bar{\lambda}$ im Intervalle (λ_1, λ_2)

multipliziert mit $\Delta \varrho_0 = \sum (\Delta \varrho_p)^2$. Also nimmt die Form $K(x)$ unter der Nebenbedingung $\sum x_p^2 = 1$ den Wert $\bar{\lambda}$ an und kommt daher, da wir Δ beliebig klein nehmen können, jedem Werte im Streckenspektrum beliebig nahe; damit ist wegen der Beschränktheit von K die Behauptung bewiesen. — Ähnlich könnte man nun übrigens noch direkt zeigen, daß ein Streckenspektrum aus komplexen Werten nicht auftreten kann.

Wir müssen nun zunächst einige Hilfsbetrachtungen einschalten:

§ 6.

Systeme orthogonaler linearer Differentialformen.

Ich bemerke zunächst, daß die sämtlichen Koeffizienten $\varrho_p(\lambda)$ bzw. $d\varrho_p(\lambda)$ unseres Systems ebenso ein zweidimensionales (von 2 Variablen p, λ abhängiges) Schema darstellen, wie die Koeffizienten l_{pq} der früher betrachteten Systeme abzählbar unendlichvieler normierter Orthogonalformen $L_p(x)$. Nur durchläuft jetzt der eine Index λ einen *kontinuierlichen* Wertevorrat — einen Teil der reellen Achse —, während vorher beide Indizes gleichmäßig die *abzählbare* Reihe der ganzen Zahlen durchliefen. Im Grunde ist diese Abweichung aber nur eine scheinbare, da für jedes p die kontinuierlich vielen Werte $\varrho_p(\lambda)$ eine *stetige* Funktion von λ bilden sollen und daher bereits durch abzählbar viele Angaben bestimmt sind. Infolgedessen werden wir tatsächlich Resultate erhalten, die den für jene abzählbaren Systeme geltenden Sätzen ganz analog sind.

Aus der unser System definierenden Relation

$$(1.) \quad (\Delta_1 P, \Delta_2 P) = \sum_{(p)} \Delta_1 \varrho_p \Delta_2 \varrho_p = \Delta_{(1, 2)} \varrho_0$$

schließen wir zunächst, wenn $\Delta_1 = \Delta_2$ ist, daß stets $\Delta \varrho_0 \geq 0$, d. h. daß die *Basisfunktion notwendig monoton ist*; ferner folgt, daß in sämtlichen Konstanzintervallen von $\varrho_0(\lambda)$ sämtliche $\varrho_p(\lambda)$ konstant d. h. sämtliche $\Delta P(\lambda; x)$ identisch Null sind. Die Gesamtheit der Stellen, an denen die Differentialformen $dP(\lambda; x)$ (im Sinne von S. 242) nicht identisch verschwinden, d. h. das ihnen zugehörige *Streckenspektrum*, ist also identisch mit der *perfekten Punktmenge*, die von der reellen λ -Achse nach Abzug der inneren Punkte der

höchstens abzählbar unendlichvielen Konstanzintervalle von $\varrho_0(\lambda)$ übrig bleibt; sie hat als solche notwendig die *Mächtigkeit des Kontinuums*.

Wir bilden jetzt aus unseren orthogonalen Differentialformen das, was der *Quadratsumme* beschränkter Orthogonalformen analog ist. Sind $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ irgend n getrennte Teile eines Intervalles (a, b) der λ -Achse, so sind die n Formen

$$\frac{\mathcal{A}_i P(\lambda; x)}{\sqrt{\mathcal{A}_i \varrho_0(\lambda)}} = \sum_{(p)} \frac{\mathcal{A}_i \varrho_p(\lambda)}{\sqrt{\mathcal{A}_i \varrho_0(\lambda)}} x_p \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

wegen (1.) n orthogonale normierte beschränkte Linearformen. Also ist nach einem bekannten Satze (§ 1, (11.)) ihre Quadratsumme:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\{\mathcal{A}_i P(\lambda; x)\}^2}{\mathcal{A}_i \varrho_0(\lambda)} \leq \sum_{(p)} x_p^2.$$

Da das für alle Teilungen des Intervalles (a, b) gilt, und die obere Grenze $\sum_{(p)} x_p^2$ von der Wahl der Teilung unabhängig ist, folgt aus § 4 (S. 237) in dem dort definierten Sinne die Existenz des Integrales:

$$(2.) \quad \int_a^b \frac{(dP(\lambda; x))^2}{d\varrho_0(\lambda)} = \sum_{(p, q)} x_p x_q \int_a^b \frac{d\varrho_p(\lambda) d\varrho_q(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)} \leq \sum_{(p)} x_p^2,$$

das zudem nach (12.) des § 4 eine beschränkte quadratische Form der x_p darstellt.

Nachdem so die Existenz dieser Integrale garantiert ist, verstehen wir unter f eine beliebige Funktion, für die nur $\int_a^b \frac{df^2}{d\varrho_0}$ existiert; dann folgt aus (10.) des § 4, wenn wir darin für x_p die Werte $\varrho_p(\lambda_1)$ an irgendeiner Stelle λ_1 des Intervalles (a, b) setzen:

$$(3.) \quad \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda_1) \int_a^b \frac{df(\lambda) d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)} = \int_a^b \frac{df(\lambda) d\{\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) \varrho_p(\lambda_1)\}}{d\varrho_0(\lambda)} = f(\lambda_1),$$

da nach (1.) $\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) \varrho_p(\lambda_1)$ gleich $\varrho_0(\lambda)$ bzw. $\varrho_0(\lambda_1)$ ist, je nachdem $\lambda \leq \lambda_1$ oder $\lambda > \lambda_1$ ist. Wir können diese offenbar absolut und gleichmäßig konvergente Reihe als Entwicklung von $f(\lambda_1)$ nach den Funktionen $\varrho_p(\lambda)$ bezeichnen. — Bedeutet $f_1(\lambda)$ eine zweite gleichartige Funktion wie $f(\lambda)$, so wenden wir wiederholt die Formel (10.) des § 4 an, indem wir $x_p = \int_a^b \frac{df_1 d\varrho_p}{d\varrho_0}$ und daher nach (3.) $P(\lambda; x) = f_1(\lambda)$ setzen; wir finden dann:

$$(4.) \quad \sum_{(p)} \int_a^b \frac{df(\lambda) d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)} \int_a^b \frac{df_1(\lambda) d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)} = \int_a^b \frac{df(\lambda) df_1(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)}.$$

Diese Formel ist der Orthogonalitätseigenschaft (1.) völlig äquivalent, und zwar ergibt sich (1.) sofort aus ihr, wenn wir $f(\lambda)$ in \mathcal{A}_1 , $f_1(\lambda)$ in \mathcal{A}_2 gleich $\varrho_0(\lambda)$, und $f(\lambda)$ außerhalb \mathcal{A}_1 sowie $f_1(\lambda)$ außerhalb \mathcal{A}_2 konstant setzen.

Man kann nun zu jeder beliebig, nur als monotone stetige Funktion gegebenen Basis $\varrho_0(\lambda)$ ein solches System orthogonaler Differentialformen leicht bilden. Es sei der Bequemlichkeit halber $\varrho_0(a) = 0$, $\varrho_0(b) = 1$ angenommen, was keine wesentliche Einschränkung ist, und es mögen die stetigen Funktionen $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ ein sog. „vollständiges Funktionensystem“ für das Intervall $0 \leq t \leq 1$ bilden, d. h. es bestehe für je zwei willkürliche nur abteilungsweise stetige Funktionen $u(t), v(t)$ die Relation:

$$(5.) \quad \sum_{(p)} \int_0^1 u(t) \varphi_p(t) dt \int_0^1 v(t) \varphi_p(t) dt = \int_0^1 u(t) v(t) dt.$$

Solche Systeme kann man leicht bilden*); ein einfachstes Beispiel sind bekanntlich die trigonometrischen Funktionen $\varphi_p(t) = \sqrt{2} \sin \pi p t$. Dann stellen die Funktionen

$$(5a.) \quad \varrho_p(\lambda) = \int_0^{\varrho_0(\lambda)} \varphi_p(t) dt$$

*) Vgl. etwa Hilbert V, S. 442ff.

die Koeffizienten eines Systemes orthogonaler Differentialformen dar; denn setzen wir $u(t) = u(\varrho_0(\lambda))$ gleich 1, wenn λ in \mathcal{A}_1 variiert, sonst aber gleich 0, und ebenso $v(t) = v(\varrho_0(\lambda))$ gleich 1, wenn λ in \mathcal{A}_2 variiert und sonst gleich 0, so geht (5.) unmittelbar in die definierende Relation (1.) über.

Man wird ein System linearer Differentialformen *vollständig* nennen, wenn die Ungleichung (2.) für alle x als Gleichung erfüllt ist:

$$(6.) \quad \int_a^b \frac{(dP(\lambda; x))^2}{d\varrho_0(\lambda)} = \sum_{(p)} x_p^2 \quad \text{oder} \quad \int_a^b \frac{d\varrho_p(\lambda) d\varrho_q(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)} = \delta_{pq} = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q). \end{cases}$$

Das soeben konstruierte besondere System wird auch vollständig, wenn man den φ_p noch die Relationen:

$$(7.) \quad \int_0^1 \varphi_p(t) \varphi_q(t) dt = \delta_{pq} = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases}$$

aufgelegt; denn aus (5^a.) ergibt sich unmittelbar nach dem Mittelwertsatz, daß die verallgemeinerten Integrale (6.) diesen gewöhnlichen Integralen gleich sind.

Man nennt gewöhnlich die Gleichungen (5.) die Vollständigkeits-, (7.) die Orthogonalitätsrelationen, also gerade umgekehrt als die Benennung, zu der wir hier naturgemäß geführt werden. Man denkt sich nämlich dabei gerade alle Werte $\varphi_p(\lambda)$ für einen festen Index p zu einem Individuum, einer Funktion, zusammengezogen, während wir hier gerade alle Werte $\varrho_p(\lambda)$ bzw. $d\varrho_p(\lambda)$ für eine feste Stelle λ zu einem Individuum, einer Differentialform, zusammenfaßten. Beides ist gleich berechtigt, ebenso wie man aus einem gewöhnlichen abzählbaren orthogonalen Schema (l_{pq}) sowohl die Formen $L_p = \sum_{(q)} l_{pq} x_q$, als auch die $L'_p = \sum_{(q)} l_{qp} x_q$ bilden kann; nur ist das Resultat im vorliegenden Falle äußerlich von etwas verschiedener Form, da nur noch der eine Index p des Schemas abzählbar viele, der andere jedoch kontinuierlich viele Werte durchläuft. Jedenfalls sind aber auch hier Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelation ihrem Wesen nach gleichartige, nur in der Auffassung unterschiedene Relationen; die Erfüllung

der einen von ihnen zieht stets eine gewisse Ungleichung als notwendige Folge nach sich, die — wenn sie in eine Gleichung übergeht — die andere liefert.

Wir wollen nun endlich noch gleichzeitig mehrere in demselben Intervalle der λ -Achse definierte Systeme orthogonaler Differentialformen $P^{(\alpha)}(\lambda; x) = \sum_{(p)} \varrho_p^{(\alpha)}(\lambda) x_p$ mit den Basisfunktionen $\varrho_0^{(\alpha)}(\lambda)$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) in Betracht ziehen, die außerdem noch sämtlich untereinander orthogonal sein sollen, d. h.

$$(8.) \quad (\mathcal{A}_1 P^{(\alpha)}, \mathcal{A}_2 P^{(\beta)}) = \sum_{(p)} \mathcal{A}_1 \varrho_p^{(\alpha)} \mathcal{A}_2 \varrho_p^{(\beta)} = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \\ \mathcal{A}_{(1,2)} \varrho_0^{(\alpha)} & \text{für } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Da demgemäß die für getrennte Intervalle \mathcal{A}_i oder verschiedene Indizes α gebildeten Linearformen $\frac{\mathcal{A}_i P^{(\alpha)}}{\sqrt{\mathcal{A}_i \varrho_0^{(\alpha)}}}$ ein System beschränkter normierter Orthogonalformen bilden, so können wir durch Wiederholung des Schlusses von S. 248 folgern, daß jede Summe von endlichvielen oder abzählbar unendlichvielen Integralen, deren jedes nach (2.) aus einem der Systeme $P^{(\alpha)}(\lambda; x)$ gebildet ist, konvergiert und eine der folgenden Ungleichung genügende quadratische Form darstellt:

$$(9.) \quad \sum_{\alpha=1, 2, \dots} \int_a^b \frac{(dP^{(\alpha)}(\lambda; x))^2}{d\varrho_0^{(\alpha)}(\lambda)} \leq \sum_{(p)} x_p^2.$$

Weiterhin aber können wir hieraus oder auch direkt aus dem für beschränkte Orthogonalformen geltenden entsprechenden Satze (§ 1, S. 220) schließen, daß es in jedem Intervalle $\mathcal{A} = (a, b)$ der λ -Achse höchstens abzählbar unendlichviele solche nicht identisch verschwindende aufeinander orthogonale Systeme orthogonaler Differentialformen geben kann. Denn da $\mathcal{A} \varrho_0^{(\alpha)} = \varrho_0^{(\alpha)}(b) - \varrho_0^{(\alpha)}(a)$ jedenfalls von Null verschieden ist, hätten wir in $\frac{\mathcal{A} P^{(\alpha)}(\lambda; x)}{\sqrt{\mathcal{A} \varrho_0^{(\alpha)}}}$ sonst mehr als abzählbar unendlichviele nicht identisch verschwindende normierte beschränkte Orthogonalformen.

§ 7.

Die Integraldarstellung der quadratischen Form für das Streckenspektrum.

Wir fahren nunmehr in den Betrachtungen von § 5 fort, und zwar gestatten uns die inzwischen gewonnenen Hilfsmittel, das in § 2 (S. 225 ff.) bei den Punkteigenwerten eingeschlagene Verfahren ganz genau zu übertragen, wenn wir uns jetzt zur *Frage nach den sämtlichen in einem Intervalle (a, b) möglichen Eigendifferentialformen von K(x)* wenden. Es sei also $dP^{(1)}(\lambda; x)$ irgend eine solche mit der Basisfunktion $\varphi_0^{(1)}(\lambda)$:

$$(a_1.) \quad K \mathcal{A}P^{(1)}(\lambda; x) = \int_{(\mathcal{A})} \lambda dP^{(1)}(\lambda; x), \quad \text{wo } (\mathcal{A}_1 P^{(1)}, \mathcal{A}_2 P^{(1)}) = \mathcal{A}_{(1,2)} \varphi_0^{(1)},$$

so bilden wir die nach (2.) des § 6 und (12.) des § 4 beschränkte quadratische Form

$$(b_1.) \quad K_1(x) = K(x) - \int_a^b \lambda \frac{(dP^{(1)}(\lambda; x))^2}{d\varphi_0^{(1)}(\lambda)}.$$

Sie hat sicher $dP^{(1)}(\lambda; x)$ nicht mehr zum Eigendifferential im Intervalle (a, b) ; denn zufolge (12^a.) des § 4 wird für jedes Intervall $\mathcal{A} = (\lambda_1, \lambda_2)$ innerhalb (a, b) :

$$K_1 \mathcal{A}P^{(1)}(x) = K \mathcal{A}P^{(1)}(x) - \int_a^b \lambda \frac{dP^{(1)}(\lambda; x) d(P^{(1)}(\lambda), \mathcal{A}P^{(1)})}{d\varphi_0^{(1)}(\lambda)},$$

und da wegen der Orthogonalitätseigenschaft $(P^{(1)}(\lambda), \mathcal{A}P^{(1)})$ unabhängig von λ ist, wenn λ außerhalb \mathcal{A} variiert, andernfalls aber gleich $\varphi_0^{(1)}(\lambda) - \varphi_0^{(1)}(\lambda_1)$ ist, so folgt

$$(c_1.) \quad K_1 \mathcal{A}P^{(1)}(x) = K \mathcal{A}P^{(1)}(x) - \int_{(\mathcal{A})} \lambda dP^{(1)}(\lambda; x) = 0 \quad \text{wegen } (a_1).$$

Nun kann allerdings K_1 möglicherweise noch andere Eigendifferentialformen

$dP^{(2)}(\lambda; x)$ im Intervalle (a, b) besitzen, die dann ein System orthogonaler Differentialformen, etwa mit der Basis $\varrho_0^{(2)}(\lambda)$, bilden:

$$(a_2.) \quad K_1 \mathcal{A} P^{(2)}(\lambda; x) = \int_{(\mathcal{A})} \lambda dP^{(2)}(\lambda; x), \quad \text{wo} \quad (\mathcal{A}_1 P^{(2)}, \mathcal{A}_2 P^{(2)}) = \mathcal{A}_{(1,2)} \varrho_0^{(2)}.$$

Falten wir diese Identität mit $\mathcal{A}_1 P^{(1)}(\lambda; x)$, wo \mathcal{A}_1 irgendein zweites Teilintervall von (a, b) ist, so verschwindet in Rücksicht auf die Symmetrie der Form K_1 wegen $(c_1.)$ die linke Seite identisch, und es folgt, wenn wir noch die rechte Seite nach (9.) des § 4 umformen:

$$0 = \int_{(\mathcal{A})} \lambda d(P^{(2)}(\lambda), \mathcal{A}_1 P^{(1)}).$$

Da dies für jedes Teilintervall \mathcal{A} von (a, b) gelten soll, muß der Integrand identisch verschwinden (vgl. § 4, (4.)), d. h. für je zwei Teilintervalle $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ gilt:

$$(\mathcal{A} P^{(2)}, \mathcal{A}_1 P^{(1)}) = 0.$$

Falten wir nunmehr $(b_1.)$ mit $\mathcal{A} P^{(2)}$, und behandeln den Integralbestandteil genau wie oben, so ergibt er dieser Identität zufolge Null, und unter Berücksichtigung von $(a_2.)$ bleibt

$$\int_{(\mathcal{A})} \lambda dP^{(2)}(\lambda; x) = K \mathcal{A} P^{(2)}(\lambda; x),$$

d. h. $dP^{(2)}(\lambda; x)$ gehört als Eigendifferential für das Intervall (a, b) auch zu der ursprünglichen Form $K(x)$.

Nun bilden wir weiter nach demselben Verfahren die neue beschränkte Form

$$K_2(x) = K_1(x) - \int_a^b \lambda \frac{(dP^{(2)}(\lambda; x))^2}{d\varrho_0^{(2)}(\lambda)} = K(x) - \int_a^b \lambda \frac{(dP^{(1)}(\lambda; x))^2}{d\varrho_0^{(1)}(\lambda)} - \int_a^b \lambda \frac{(dP^{(2)}(\lambda; x))^2}{d\varrho_0^{(2)}(\lambda)},$$

für die sofort ebenso

$$K_2 \mathcal{A} P^{(1)}(\lambda; x) = K_2 \mathcal{A} P^{(2)}(\lambda; x) = 0$$

folgt. Wohl aber kann K_2 möglicherweise ein weiteres System von Eigendifferentialformen $dP^{(3)}(\lambda; x)$ haben, das dann notwendig auch ein zu $dP^{(1)}$ und $dP^{(2)}$ orthogonales Eigendifferentialsystem von K selbst für das Intervall (a, b) ist.

So fortschließend erhalten wir ein ganzes System zueinander orthogonaler Eigendifferentialformen $P^{(\alpha)}(\lambda; x)$, und da es deren nur abzählbar unendlichviele geben kann (vgl. S. 251), so muß unser Verfahren nach höchstens abzählbar unendlichvielen Schritten ein Ende erreichen: *wir müssen schließlich zu einer Form*

$$(1.) \quad K_0(x) = K(x) - \sum_{\alpha=1, 2, \dots} \int_a^b \lambda \frac{(dP^{(\alpha)}(\lambda; x))^2}{d\varphi_0^{(\alpha)}(\lambda)}$$

gelangen, die für das Intervall (a, b) kein einziges Eigendifferential mehr hat, während die höchstens abzählbar unendlichvielen $P^{(\alpha)}$ den Relationen

$$(2a.) \quad K \mathcal{A} P^{(\alpha)}(\lambda; x) = \int_{(A)} \lambda dP^{(\alpha)}(\lambda; x),$$

$$(2b.) \quad K_0 \mathcal{A} P^{(\alpha)}(\lambda; x) = 0,$$

$$(2c.) \quad (\mathcal{A}_1 P^{(\alpha)}, \mathcal{A}_2 P^{(\beta)}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha \neq \beta, \\ \mathcal{A}_{(1, 2)} \varphi_0^{(\alpha)}(\lambda) & \text{für } \alpha = \beta \end{cases}$$

genügen; die Beschränktheit der Form (1.) folgt auch bei unendlichvielen $P^{(\alpha)}$ aus der Ungleichung (9.) des § 6.

Es sei nun $\Pi(\lambda; x) = \sum_{(p)} \pi_p x_p$ irgendein zum Intervalle (a, b) gehöriges System von Eigendifferentialformen von $K(x)$:

$$(3.) \quad K \Delta \Pi(\lambda; x) = \int_{(\mathcal{A})} \lambda d \Pi(\lambda; x).$$

Wir bilden nun, ganz analog wie wir früher eine beschränkte Linearform nach einem System orthogonaler beschränkter Formen entwickelten (S. 227), das, was wir etwa eine „Entwicklung des Systems beschränkter Differentialformen $d \Pi(\lambda; x)$ nach den orthogonalen Differentialformen $d P^{(\alpha)}(\lambda; x)$ “ nennen können. Wir erhalten sie, indem wir die Quadratsumme dieses Formensystemes $\sum_{(\alpha)} \int_a^b \frac{(d P^{(\alpha)})^2}{d q_0^{(\alpha)}}$ mit $\Delta \Pi$ falten, was nach (12^a.) des § 4 ergibt:

$$\sum_{(\alpha)} \int_a^b \frac{d P^{(\alpha)}(\lambda; x) d (P^{(\alpha)}(\lambda), \Delta \Pi)}{d q_0^{(\alpha)}(\lambda)}.$$

Nun müssen aber die für getrennt liegende Intervalle gebildeten Differenzen $\Delta_1 P^{(\alpha)}$, $\Delta_2 \Pi$ orthogonal zueinander sein, da beides Differentialeigenformen von K sind; es war offenbar unwesentlich, daß wir beim Beweise dieses Satzes in § 5 (S. 242ff.) für die Lösungen in beiden Intervallen denselben Buchstaben P verwendeten. Daher ist die Faltung $(P^{(\alpha)}(\lambda), \Delta \Pi)$ wiederum stets von λ unabhängig, wenn λ außerhalb \mathcal{A} variiert, während sie innerhalb \mathcal{A} eine gewisse stetige Funktion $\sigma^{(\alpha)}(\lambda)$ darstellt, die bis auf eine additive Konstante gleich $(P^{(\alpha)}(\lambda), \Pi^{(\alpha)}(\lambda))$ ist. Nunmehr bilden wir mit jener so umgeformten Linearform die notwendig wiederum beschränkte Linearform

$$(3'.) \quad \Delta \Pi_0(\lambda; x) = \Delta \Pi(\lambda; x) - \sum_{(\alpha)} \int_{(\mathcal{A})} \frac{d P^{(\alpha)}(\lambda; x) d \sigma^{(\alpha)}(\lambda)}{d q_0^{(\alpha)}(\lambda)},$$

wo $\sigma^{(\alpha)}(\lambda) = (P^{(\alpha)}(\lambda), \Pi(\lambda))$;

wir zeigen, daß sie notwendig identisch verschwindet. Denn zunächst ergibt sich durch Faltung mit $K_0(x)$

$$K_0 \Delta \Pi_0(\lambda; x) = K_0 \Delta \Pi(\lambda; x),$$

da die eigentlich noch additiv hinzutretenden Integrale das wegen (2b.) identisch verschwindende Differential von $K_0 P^{(\alpha)}(\lambda; x)$ als Faktor enthalten. Tragen wir nun rechts für K_0 den Wert (1.) ein und berücksichtigen wie soeben, daß $d(P^{(\alpha)}(\lambda), \mathcal{A} \Pi)$ nur in \mathcal{A} von 0 verschieden und gleich $d\sigma^{(\alpha)}(\lambda)$ ist, so folgt mit Benutzung von (3.):

$$K_0 \mathcal{A} \Pi_0(\lambda; x) = \int_{(\mathcal{A})} \lambda d\Pi(\lambda; x) - \sum_{(\alpha)} \int_{(\mathcal{A})} \lambda \frac{dP^{(\alpha)}(\lambda; x) d\sigma^{(\alpha)}(\lambda)}{d\rho_0^{(\alpha)}(\lambda)}.$$

Indem wir endlich die rechte Seite mit Hilfe von (7.) des § 4 umformen, geht sie unter Berücksichtigung der leicht ersichtlichen gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (3'.) einfach über in

$$K_0 \mathcal{A} \Pi_0(\lambda; x) = \int_{(\mathcal{A})} \lambda d\Pi_0(\lambda; x),$$

d. h. $\mathcal{A} \Pi_0$ wäre ein Eigendifferential der Form K_0 für das Intervall (a, b) und muß daher — unserer Annahme über K_0 nach — identisch verschwinden. Also folgt aus (3'.)

$$(4.) \quad \mathcal{A} \Pi(\lambda; x) = \sum_{(\alpha)} \int_{(\mathcal{A})} \frac{dP^{(\alpha)}(\lambda; x) d\sigma^{(\alpha)}(\lambda)}{d\rho_0^{(\alpha)}(\lambda)}, \quad \text{wo } \sigma^{(\alpha)}(\lambda) = (P^{(\alpha)}(\lambda), \Pi(\lambda)),$$

was wir, indem wir symbolisch den Übergang zu den „Differentialen“

$$d\Pi(\lambda; x) = \sum_{(\alpha)} \frac{dP^{(\alpha)}(\lambda; x) d\sigma^{(\alpha)}(\lambda)}{d\rho_0^{(\alpha)}(\lambda)}$$

vollzogen denken, so aussprechen können:

Jede Differentialeigenform einer quadratischen Form $K(x)$ läßt sich in dieser Weise als lineares Aggregat von höchstens abzählbar unendlichvielen orthogonalen Differentialformen $dP^{(\alpha)}(\lambda; x)$ darstellen, und jedes solche mit willkürlichen Funktionen $\sigma^{(\alpha)}(\lambda)$, für die nur $\sum_{(\alpha)} \int_a^b \frac{(d\sigma^{(\alpha)})^2}{d\rho_0^{(\alpha)}}$ konvergiert, gebildete

Aggregat stellt offenbar eine Differentiallösung dar; die $P^{(\alpha)}(\lambda; x)$ mögen ein vollständiges System zueinander orthogonaler Eigenformen für das betr. Intervall heißen.

Nun können wir (a, b) auf das ganze vom Maximum und Minimum von $K(x)$ (unter der Nebenbedingung $\sum_{(p)} x_p^2 = 1$) begrenzte Intervall ausdehnen, auf das nach S. 246 das Streckenspektrum von $K(x)$ notwendig beschränkt ist; dann hat die durch (1.) definierte Form $K_0(x)$ überhaupt kein Streckenspektrum mehr, denn eine zu einem außerhalb (a, b) gelegenen Intervalle gehörige Eigendifferentialform müßte auch Eigendifferential von $K(x)$ selbst sein. Unser Theorem liefert also das vollständige System aller überhaupt zu $K(x)$ gehörigen Eigendifferentialformen, und es besagt überdies, daß jedem Teilintervalle des Streckenspektrums — genau wie jedem Punkteigenwert — eine gewisse höchstens abzählbar unendliche Vielfachheit zukommt; das gesamte Streckenspektrum entsteht also (vgl. § 6, S. 247) einfach durch Überlagerung der perfekten Mengen der Stellen, in deren Umgebung jede der Basisfunktionen $\varphi_0^{(\alpha)}(\lambda)$ nicht konstant ist. Ubrigens gestattet uns (1.), wenn wir etwa $K_0 = 0$ setzen, sofort die Konstruktion quadratischer Formen mit beliebig gegebenem Streckenspektrum, bzw. mit beliebig gegebenen abzählbar unendlichvielen Basisfunktionen, da wir ja nach (5.) des § 6 (S. 249) zu jeder von ihnen ein System orthogonaler Differentialformen sofort angeben können.

Im allgemeinen kann nun aber $K_0(x)$ noch ein Punktspektrum haben, und, wie man leicht sieht, ist dies, von der Stelle Null abgesehen, identisch mit dem Punktspektrum von $K(x)$. Denn ist $K_0 M(x) = \lambda_1 M(x)$, so folgt wegen (2^b.) unmittelbar $(M, \mathcal{A} P^{(\alpha)}) = 0$, wenn nur $\lambda_1 \neq 0$ ist, und daher ergibt die Faltung von (1.) mit M in der oben ausführlich erörterten Weise $K M(x) = K_0 M(x) = \lambda_1 M(x)$. / Umgekehrt aber folgt aus dieser letzten Gleichung wegen (2^a.)

$$\int_{(\mathcal{A})} \lambda d(P^{(\alpha)}, M) - \lambda_1 (\mathcal{A} P^{(\alpha)}, M) = \int_{(\mathcal{A})} (\lambda - \lambda_1) d(P^{(\alpha)}, M) = 0,$$

und da dies für jedes Intervall \mathcal{A} gilt, ist wiederum $(\mathcal{A} P^{(\alpha)}, M) = 0$ und daher gemäß (1.) $K_0 M(x) = K M(x) = \lambda_1 M(x)$. Hierin ist zugleich enthalten

(für $K_0 = 0$), daß eine durch ein Streckenintegral allein dargestellte Form keinen von Null verschiedenen Punkteigenwert haben kann. Wir können nun also $K_0(x)$ nach (7.) des § 2 durch das vollständige System $L_\beta(x)$ ($\beta = 1, 2, \dots$) der Eigenformen von $K(x)$ darstellen und erhalten, wenn wir das in (1.) eintragen, schließlich

$$(5.) \quad \underline{K(x) = \sum_{(\alpha)} \int_a^b \lambda \frac{(dP^{(\alpha)}(\lambda; x))^2}{d\rho^{(\alpha)}(\lambda)} + \sum_{(\beta)} \lambda_\beta (L_\beta(x))^2 + R(x)},$$

wo $R(x)$ eine beschränkte quadratische Form ist, die außer dem Eigenwerte $\lambda = 0$ weder *Punkt-* noch *Streckenspektrum* mehr besitzt. Ich werde im nächsten Kapitel zeigen, daß eine solche Form $R(x)$ notwendig identisch verschwindet; wir haben alsdann in (5.) die kanonische Darstellung der quadratischen Form durch ihr Streckenspektrum und ihre Differential-eigenformen einerseits, sowie ihr Punktspektrum und ihre Eigenformen andererseits — dieselbe Darstellung, die ich in meiner Dissertation (vgl. besonders § 9, Satz III, S. 60) aus den Resultaten von Herrn *Hilberts* 4. Mitteilung hergeleitet habe.

Mit der Herleitung dieser Formel ist die Theorie der quadratischen Formen zu einem gewissen Abschluß gebracht; einerseits stellt sie den Ausgangspunkt für alle Anwendungen, andererseits die Grundlage für weitere theoretische Entwicklungen dar. In dieser letzteren Hinsicht sei hier als leichte Folge von (5.) noch erwähnt, daß zwei quadratische Formen sicher dann orthogonal ineinander transformierbar sind, wenn ihre Eigenwerte einschließlich ihrer Vielfachheit und ihre Basisfunktionen paarweise übereinstimmen (vgl. meine Diss., Satz IV, S. 61). Wesentlich schwieriger ist jedoch die Herleitung *notwendiger und hinreichender* Bedingungen für orthogonale Äquivalenz; dazu ist — wobei aber immer die Formel (5.) den Ausgangspunkt bildet — noch eine tiefere Untersuchung der Integrale des § 4 nötig, und es stellen sich dann neben den bisher als Streckenspektra schlechtweg bezeichneten perfekten Mengen gewisse nicht abgeschlossene Mengen („eigentliche“ Spektren) als maßgebend heraus, die sich in bestimmter Weise aus der Art des Wachstums der Funktionen $\rho^{(\alpha)}(\lambda)$ ergeben, und die jene perfekten Mengen zu Ableitungen haben (a. a. O. Satz VII, S. 74; VIII, S. 80).

Kapitel III.

Die Existenz des Spektrums.

§ 8.

Die reziproke Form von $K - \nu E$ als analytische Funktion von ν .

Wir haben nun zur Vervollständigung unseres Beweisganges noch zu zeigen, daß eine quadratische Form, die außer $\lambda = 0$ kein Punkt- oder Streckenspektrum hat, identisch verschwindet. Nun können wir aber jede Form leicht durch eine andere mit gleichem Wertevorrat ersetzen, die $\lambda = 0$ sicher nicht zum Eigenwert hat: Bedeutet nämlich $L_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) ein vollständiges orthogonales System der zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörigen Eigenformen von $K(x)$ (§ 2, S. 228 f.), so ergänzen wir diese Formen durch $M_\beta(x)$ ($\beta = 1, 2, \dots$) zu einem vollständigen Orthogonalsystem (§ 1, S. 220), und nehmen die eineindeutige orthogonale Transformation $x'_\alpha = L_\alpha(x)$, $x''_\beta = M_\beta(x)$ der Variablen x_1, x_2, \dots in $x'_1, x'_2, \dots, x''_1, x''_2, \dots$ vor. Dann verschwindet wegen $K L_\alpha(x) = 0$ auch die Faltung der transformierten Form $K(x) = K^*(x' x'')$ mit den Linearformen x'_α , d. h. dies K^* enthält in Wahrheit nur noch die Variablen x''_β ; da ferner alle zu $\lambda = 0$ gehörigen Eigenformen lineare Kombinationen der $L_\alpha(x) = x'_\alpha$ sind, hat K^* , allein als Form der x'_β betrachtet, $\lambda = 0$ überhaupt nicht mehr zum Eigenwert. Es genügt demgemäß, das folgende *Fundamentaltheorem* zu beweisen:

Jede nicht identisch verschwindende beschränkte quadratische Form besitzt entweder eine nicht identisch verschwindende Eigenform oder eine solche Differentialeigenform.

Zum Beweise gehe ich von der Untersuchung der reziproken Form $K(\nu; x)$ der mit komplexen Parameterwerten $\nu = \lambda + i\mu$ gebildeten Formenschar $K - \nu E$ aus, die (vgl. § 2, S. 222) definiert ist durch

$$(1.) \quad (K - \nu E) K(\nu; x) = K K(\nu; x) - \nu K(\nu; x) = E(x).$$

Für den Existenzbeweis dieses $K(\nu; x)$ kommt vor allem ein allgemeiner Satz in Betracht, den Herr O. Toeplitz*) aufgestellt und durch

*) „Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen.“ Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1907, S. 101.

ein wesentlich algebraisches Verfahren (die sog. *Jacobische Transformation* der quadratischen Form) bewiesen hat: daß eine reelle beschränkte Bilinearform A eine eindeutig bestimmte Reziproke dann und nur dann besitzt, wenn die beiden definiten quadratischen Formen AA' und $A'A$ für keine der Bedingung $\sum_{(p)} x_p^2 = 1$ genügende Wertsysteme beliebig kleine Werte annehmen. Neuerdings hat Herr *E. Hilb**) diesen Satz einfacher durch Benutzung einer Potenzreihenentwicklung bewiesen, während er andererseits auch aus den allgemeineren Untersuchungen von Herrn *E. Schmidt****) über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten folgt.

Für unsern Zweck eignet sich die *Hilbsche* Beweisführung am besten, da sie sich leicht so ausgestalten läßt, daß sie auch einige für den Existenzbeweis des Spektrums notwendige Abschätzungen liefert; um das alles bald mit zu erhalten, stelle ich sie mit unwesentlichen Modifikationen zunächst dar. Dabei hat, weil es sich um komplexe Formen handelt, an Stelle von $A'A$ die *Hermiteische* Form $\overline{A}A$ zu treten (vgl. § 1, (9.))***). Wir bilden also, da K und E reell und symmetrisch sind, mit zwei konjugiert komplexen Stellen $\nu = \lambda + i\mu$, $\bar{\nu} = \lambda - i\mu$ die Form

$$(2.) \quad S = (K - \nu E)(K - \bar{\nu} E) = K^2 - 2\lambda K + (\lambda^2 + \mu^2)E = (K - \lambda E)^2 + \mu^2 E,$$

die also wiederum eine reelle symmetrische Form ist. Da $(K - \lambda E)^2$ positiv definit ist (§ 1, (8^a.)), so folgt

$$(3.) \quad S(x) \geq \mu^2 \quad \text{für} \quad E = \sum_{(p)} x_p^2 = 1,$$

d. h. S hat in jedem Punkte außerhalb der reellen Achse ein von Null verschiedenes Minimum.

Nun verwende ich nach Herrn *Hilb* die „*C. Neumannsche Potenzreihenentwicklung*“ in folgender Weise zur Darstellung der Reziproken S^{-1} von S :

*) Zitiert oben, S. 212. Anm. *).

***) Zitiert oben, S. 214. Anm. ***).

***) Vgl. *O. Toeplitz*, a. a. O., S. 109.

Es kommt darauf an, eine Form mit einem ~~Minimum~~^{Wort} kleiner als 1 zu erhalten, nach deren ansteigenden Faltungen man dann S^{-1} entwickeln kann. Eine solche Form ist

$$(4.) \quad S_1 = E - \alpha S,$$

wo α irgendeine unterhalb des reziproken Maximums von $S(x)$ (für $\sum_{(p)} x_p^2 = 1$) und also auch unterhalb $\frac{1}{\mu^2}$ gelegene positive Zahl bedeutet:

$$(5.) \quad 0 < \alpha < \frac{1}{\text{Max } S};$$

denn dann bleibt wegen (3.) tatsächlich αS stets zwischen $\alpha \mu^2$ und 1 und daher

$$(4a.) \quad 0 \leq S_1(x) \leq 1 - \alpha \mu^2 < 1 \quad \text{für} \quad \sum_{(p)} x_p^2 = 1.$$

Nun folgt aber unmittelbar, daß die Reziproke von $S = \frac{1}{\alpha}(E - S_1)$ gerade durch die folgende unendliche nach sukzessiven Faltungen von S_1 ansteigende Reihe dargestellt wird:

$$(6.) \quad S^{-1}(x) = \alpha (E(x) + S_1(x) + S_1^2(x) + S_1^3(x) + \dots).$$

Denn zunächst ist — immer für $\sum_{(p)} x_p^2 \leq 1$ — nach (6b.) des § 1 $\text{Max } S_1^n \leq (\text{Max } S_1)^n \leq (1 - \alpha \mu^2)^n$, und daher bleibt der Rest unserer Reihe unterhalb $\frac{(1 - \alpha \mu^2)^n}{\alpha \mu^2}$, d. h. die Reihe konvergiert gleichmäßig für alle jene Wertsysteme x_p und stellt daher offenbar auch eine beschränkte quadratische Form mit dem Maximum $\frac{1}{\alpha \mu^2}$ dar; nach einer Bemerkung auf S. 218 des § 1 ist obendrein jeder Summand der Reihe und daher auch diese selbst positiv definit, sodaß wir schließlich haben:

$$(6^a.) \quad 0 \leq S^{-1}(x) \leq \frac{1}{\mu^2}.$$

Endlich aber findet man durch gliedweise Faltung, die wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe unmittelbar erlaubt ist:

$$\begin{aligned} SS^{-1} &= \frac{1}{\alpha} (E - S_1) \alpha (E + S_1 + S_1^2 + \dots) \\ &= E + S_1 + S_1^2 + \dots - (S_1 + S_1^2 + \dots) = E, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Ist einmal ein bestimmter Wert α gewählt, so ergibt genau die gleiche Überlegung, daß die Reihe (6.) auch gleichmäßig in jedem Gebiete der λ - μ -Ebene konvergiert, in dem die Ungleichung (5.) erfüllt ist und μ obendrein oberhalb einer von Null verschiedenen Zahl bleibt. Ist nun M die obere Schranke von $|K(x)|$, so ist nach (6^b.) des § 1 $S \leq (M + |\lambda|)^2 + \mu^2$, und daher ist (5.) erfüllt, wenn:

$$(M + |\lambda|)^2 + \mu^2 \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Also konvergiert (6.) in jedem von einer Parallelen zur reellen λ -Achse und zwei Kreisbogen $(M \pm \lambda)^2 + \mu^2 = \frac{1}{\alpha}$ begrenzten Gebiete gleichmäßig; indem man α genügend klein macht, kann man dieses Gebiet beliebig groß machen und es insbesondere längs eines beliebig langen endlichen Stückes der λ -Achse ausdehnen.

Nunmehr schließen wir weiter, daß die Faltung

$$(7.) \quad \kappa(\nu; x) = (K - \bar{\nu} E) S^{-1} = (K - \lambda E) S^{-1} + i\mu S^{-1}$$

die Reziproke von $K - \nu E$ selbst ist; denn es ist auf Grund des assoziativen Gesetzes der Faltungsoperation (§ 1, (7^b.)):

$$(K - \nu E) \kappa = (K - \nu E) (K - \bar{\nu} E) S^{-1} = SS^{-1} = E.$$

Man bestätigt unmittelbar, daß dies K eine symmetrische Form, d. h. daß die transponierte Form $K' = S^{-1}(K - \bar{\nu}E) = K$ ist; denn in der Reihe für S^{-1} treten nur Aggregate von E, K, K^2, \dots („ganze Funktionen von K “) auf, und je zwei solche Aggregate A, B sind, wie leicht zu sehen, vertauschbar, d. h. es ist $AB = BA$. Als obere Schranke von K erhalten wir nun, da nach (9^a) des § 1:

$$|K(\nu; x)|^2 \leq S^{-1}(K - \nu E)(K - \bar{\nu}E)S^{-1} = S^{-1}SS^{-1} = S^{-1}$$

gilt, wegen (6^a):

$$(7^a.) \quad |K(\nu; x)| \leq \frac{1}{\mu}.$$

Damit ist aber bewiesen, daß $K - \nu E$ für jedes komplexe ν mit Ausnahme höchstens der Stellen der reellen Achse eine beschränkte reziproke Form $K(\nu; x)$ besitzt, die überdies noch bei Annäherung an die reelle Achse von nicht höherer als erster Ordnung unendlich wird (d. h. $\mu K(\nu; x)$ bleibt unter einer endlichen Grenze). Diese letzte Tatsache entspricht dem Satze der Elementarteilertheorie, daß eine reelle symmetrische Bilinearform nur einfache Elementarteiler hat. Man erkennt übrigens nun auch leicht, daß $K(\nu; x)$ an jeder Stelle, wo es überhaupt existiert, als beschränkte Reziproke (d. h. durch die Gleichung (1.)) bereits eindeutig bestimmt ist; denn wäre $(K - \nu E)K_1 = E$, so folgte durch vordere Faltung mit K (da wegen der Symmetrie von K $K(K - \nu E) = E$ ist) unmittelbar $K_1 = K^*$.

Es ist nun ferner sofort zu sehen, daß der Wert dieser Form $K(\nu; x)$ für jedes bestimmte Wertsystem der x_p bzw. jeder einzelne ihrer Koeffizienten im ganzen Existenzbereich eine reguläre analytische Funktion von ν darstellt. Man kann nämlich in der Umgebung jeder Stelle ν_0 , an der $K(\nu_0; x) = K_0$ als beschränkte Form existiert, die Reziproke durch folgende nach Potenzen von $\nu - \nu_0$ fortschreitende Reihe darstellen, deren Koeffizienten die sukzessiven Faltungen von K_0 sind:

$$(8.) \quad K(\nu; x) = K_0(x) + (\nu - \nu_0) K_0^2(x) + (\nu - \nu_0)^2 K_0^3(x) + \dots$$

*) Vgl. O. Toeplitz, a. a. O., S. 106.

Denn einmal kann man genau wie bei (6.) zeigen, daß diese Reihe für $|\nu - \nu_0| < \frac{1}{\text{Max}|K_0|}$ absolut und gleichmäßig gegen eine beschränkte quadratische Form konvergiert, und andererseits bestätigt man durch gliedweise Faltung unter Berücksichtigung von $(K - \nu_0)K_0 = E$, daß tatsächlich vermöge (8.):

$$(K - \nu E)K = (K - \nu_0 E)K - (\nu - \nu_0)K = (K - \nu_0 E)K_0 = E$$

wird, d. h. daß die Reihe (8.) wirklich die durch (1.) eindeutig definierte Reziproke darstellt.

In ganz analoger Weise können wir auch eine Reihenentwicklung von $K(\nu; x)$ in der Umgebung des unendlichfernen Punktes angeben, und zwar ist diese

$$(9.) \quad K(\nu; x) = -\frac{E(x)}{\nu} - \frac{K(x)}{\nu^2} - \frac{K^2(x)}{\nu^3} - \dots$$

unabhängig von der vorherigen Kenntnis von (7.), da für unendlich wachsende ν $\frac{1}{\nu}(K - \nu E)$ in die sich selbst reziproke Form E übergeht. Auf Grund wiederum der gleichen einfachen Abschätzung erkennt man, daß für $|\nu| > \text{Max}|K| = M$, d. h. also außerhalb eines Kreises mit dem Radius M , (9.) gleichmäßig und absolut gegen eine beschränkte Form konvergiert, während durch gliedweise Faltung sofort wieder folgt:

$$(K - \nu E)K = KK - \nu K = E.$$

Die Betrachtungen des folgenden abschließenden Paragraphen beruhen nun — kurz gesagt — darauf, daß $K(\nu; x)$ als eine nicht identisch verschwindende für alle nichtreellen Werte und auch im Unendlichen reguläre analytische Funktion notwendig auf der reellen Achse im Endlichen Singularitäten (Punkte oder Linien) haben muß; ich werde ein Verfahren angeben, aus dem Verhalten von K in der Umgebung dieser Singularitäten

die Eigenformen und die Differentiallösungen herzustellen und ihre Existenz zu beweisen.

§ 9.

Verhalten der reziproken Form an der reellen Achse: das Spektrum.

Nähert sich ν der reellen Achse, so wird zwar $K(\nu; x)$ durchaus keinen bestimmten Grenzwert besitzen müssen; da es aber dabei von höchstens erster Ordnung unendlich wird, so werden wir aus seinem parallel der reellen Achse erstreckten *Integrale* einen bestimmten endlichen Grenzwert ableiten können, der uns gerade die gewünschten Lösungen liefern wird. Setzen wir nun

$$(1.) \quad K(\nu; x) = \sum_{(p,q)} z_{pq}(\nu) x_p x_q,$$

wo jedes $z_{pq}(\nu)$ eine außerhalb der reellen Achse reguläre analytische Funktion ist, so können wir die Definitionsidentität (1.) des § 8 von K auflösen in die Koeffizientengleichungen:

$$(2.) \quad \sum_{(a)} k_{pa} z_{aq}(\nu) - \nu z_{pq}(\nu) = \delta_{pq}. \quad (p, q = 1, 2, \dots)$$

Die Reihe linker Hand konvergiert in jedem um ein endliches Stück von der reellen Achse abstehenden Gebiete gleichmäßig (vgl. § 1, S. 215), da in ihm nach (7^a.) des § 8 $K(\nu; x)$ und mithin auch $\sum_{(a)} x_a z_{aq}(\nu)$ eine von ν unabhängige endliche obere Schranke hat; also dürfen wir, wenn wir (2.) bei einem festen Werte von μ nach λ integrieren, die unendliche Reihe gliedweise integrieren und finden:

$$(3.) \quad \sum_{(a)} k_{pa} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} z_{aq}(\lambda + i\mu) d\lambda - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (\lambda + i\mu) z_{pq}(\lambda + i\mu) d\lambda = \delta_{pq} (\lambda_1 - \lambda_0). \quad (p, q = 1, 2, \dots)$$

Nun konvergiert aber nach einer Bemerkung von S. 216 auch die Reihe (1.) für den in Betracht kommenden Wertebereich von λ gleichmäßig, und daher ist für jedes Wertsystem x_p

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} K(\nu; x) d\lambda = \sum_{(p, q)} x_p x_q \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} x_{pq}(\nu) d\lambda; \quad \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \nu K(\nu; x) d\lambda = \sum_{(p, q)} x_p x_q \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \nu x_{pq}(\nu) d\lambda;$$

diese Integrale stellen also offenbar beschränkte quadratische Formen dar. Wir können daher die Gleichungen (3.) zusammenfassen zu der Faltungsidentität:

$$K \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} K(\lambda + i\mu; x) d\lambda - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (\lambda + i\mu) K(\lambda + i\mu; x) d\lambda = (\lambda_1 - \lambda_0) E(x).$$

Spalten wir hier K nach (7.) des § 8 in Real- und Imaginärteil, so ergeben die mit i multiplizierten Teile:

$$(4.) \quad K \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1} d\lambda - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda \mu S^{-1} d\lambda - \mu \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (K - \lambda E) S^{-1} d\lambda = 0.$$

Indem wir nun in dieser Gleichung zur Grenze $\mu = 0$ übergehen, wird sich ergeben, daß die (notwendig existierenden) Grenzwerte des Integrales $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1} d\lambda$ die Eigenformen bzw. Differentialeigenformen liefern.

Tatsächlich sieht man ja zunächst ohne Rücksicht auf Konvergenz, daß (4.) in die die Differentialeigenformen definierende Identität rein formell übergeht — *sofern bei diesem Grenzprozeß das dritte Glied gegen Null konvergiert.* Es wird der erste Schritt unseres Beweisganges sein, diese Tatsache zu zeigen; dabei liegt die Bemerkung zugrunde, daß $(K - \lambda E) d\lambda$ wegen (2.) des § 8 nichts als das Differential von S selbst ist, so daß es sich einfach darum handelt, die Abschätzung des Integrales $\int \frac{ds}{s} = \log s$ in das Gebiet des Kalküls mit Bilinearformen (Matrizen) zu übertragen. Im einzelnen gestaltet sich die Abschätzung so: Wie oben (S. 262) bemerkt, kann man den Parameter α so klein wählen, daß die Reihe (6.) des § 8 für S^{-1} im ganzen Intervalle $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ und für einen festen Wert von μ gleichmäßig konvergiert, so daß man also das Integral

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (K - \lambda E) S^{-1} d\lambda = \alpha \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (K - \lambda E) \{E + (E - \alpha S) + (E - \alpha S)^2 + \dots\} d\lambda$$

gliedweise ausrechnen kann. Nun findet man durch direktes Ausrechnen, wenn man die Vertauschbarkeit je zweier „ganzer Funktionen“ von K (vgl. S. 263) berücksichtigt:

$$\frac{\partial (E - \alpha S)^n}{\partial \lambda} = 2\alpha n (K - \lambda E) (E - \alpha S)^{n-1},$$

und daher wird

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (K - \lambda E) S^{-1} d\lambda = \frac{1}{2} \left[(E - \alpha S) + \frac{(E - \alpha S)^2}{2} + \frac{(E - \alpha S)^3}{3} + \dots \right]_{\lambda=\lambda_0}^{\lambda=\lambda_1}.$$

Aus der Ungleichung (4^a.) des § 8 folgt nun sofort, daß die rechte Seite dem absoluten Betrage nach stets unterhalb

$$\frac{1}{2} \left[1 - \alpha \mu^2 + \frac{(1 - \alpha \mu^2)^2}{2} + \frac{(1 - \alpha \mu^2)^3}{3} + \dots \right] = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\alpha \mu^2}$$

bleibt; also ist stets

$$(5.) \quad \left| \mu \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (K - \lambda E) S^{-1} d\lambda \right| < \frac{1}{2} \mu \log \frac{1}{\alpha \mu^2},$$

und dieses Integral konvergiert daher mit abnehmendem μ tatsächlich gleichmäßig gegen Null.

Wir haben nun zweitens zu untersuchen, was bei dem Grenzprozeß aus $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1} d\lambda$ wird; wir zeigen zunächst, daß dieses längs eines hinreichend großen Intervalles erstreckte Integral stets einen endlichen und sogar von Null verschiedenen Grenzwert hat. Wir bemerken sogleich, daß dabei immer nur das Intervall $(-M, +M)$ — unter M die obere Schranke

von $|K(x)|$ verstanden — in Betracht kommen kann; denn für $|\lambda + i\mu| > M$ bleibt $K(\nu; x)$ regulär und daher auch $S^{-1} = \overline{K}K$ endlich, und $\int_{\mu=0} \mu S^{-1}$

konvergiert gleichmäßig gegen Null. Zum Beweise der letzten Behauptung wenden wir nun den *Cauchyschen* Integralsatz auf das Gebiet der oberen Halbebene an, das von einem Halbkreise \mathfrak{k} mit dem Radius $r > M$ und der Parallelen \mathfrak{g} im Abstände $\frac{M}{\nu}$ zur reellen Achse begrenzt wird; in diesem Gebiete ist $K(\nu; x)$ eine reguläre analytische Funktion von ν und daher ist das Randintegral:

$$\int_{(g)} K(\nu; x) d\lambda + \int_{(k)} K(\nu; x) d\nu = 0.$$

Lassen wir nun μ gegen Null konvergieren, so geht der imaginäre Teil des ersten Integrales in $\int_{\mu=0}^{+M} \mu S^{-1} d\lambda$ über; im zweiten Integral können wir für K die Entwicklung (9.) des § 8 einführen, so daß es, wenn wir noch $\nu = r e^{i\varphi}$ setzen, übergeht in

$$- \int_0^\pi \left\{ \frac{E(x)}{\nu} + \frac{K(x)}{\nu^2} + \frac{K(x)^2}{\nu^3} + \dots \right\} i \nu d\varphi.$$

Da wir r beliebig groß nehmen können, wird das einfach gleich $-\pi E(x)$ (d. i. im wesentlichen das Residuum von K im Unendlichen) und daher haben wir in der Tat

$$(6.) \quad \int_{\mu=0}^{+M} \mu S^{-1} d\lambda = \pi E(x).$$

Nun könnte man weiterhin durch eine der Abschätzung (5.) ähnliche, nur etwas kompliziertere Betrachtung (eine Übertragung des Arcustangens-Integrales in den Matrizenkalkül) zeigen, daß auch $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1} d\lambda$ stets

einen bestimmten Grenzwert für $\mu=0$ hat. Da aber μS^{-1} wesentlich positiv ist, so genügt die Formel (6.) bereits, um auf die Existenz eines bestimmten Limes superior des Integrales bei diesem Grenzprozeß zu schließen, der wegen (6.) zugleich eine positiv definite und beschränkte (unterhalb π bleibende) quadratische Form der x_p darstellen muß; setzen wir

$$(7.) \quad \lim_{\mu=0} \sup_{-M} \int_{-M}^{\lambda} \mu S^{-1}(x) d\lambda = \sigma(\lambda; x),$$

so ist $\sigma(\lambda; x)$ bei festen x_p eine monotone Funktion von λ , die allerdings nicht notwendig stetig zu sein braucht. Man kann dann nach einem bekannten Verfahren sofort eine solche Folge von Werten μ angeben, daß für sie auch eine zugehörige gewöhnliche Limesgleichung (7.) für alle in Betracht kommenden Werte λ und x gilt, und es wären nur diese Werte μ im folgenden zu verwenden.

Nehmen wir nunmehr in (4.) den Grenzübergang vor, so konvergiert zunächst $K \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1} d\lambda$ gegen $K(\sigma(\lambda_1) - \sigma(\lambda_0))$; denn jeder Koeffizient jener Form ist seinerseits eine Linearform der Koeffizienten von $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1} d\lambda$, und sein Grenzwert ergibt sich daher nach der „Vollstetigkeitseigenschaft“ der beschränkten Linearformen (§ 1, S. 215), indem man für diese Argumente ihre Grenzwerte einsetzt. Es bleibt nun nur noch der zweite Summand von (4.) zu behandeln, den wir durch Produktintegration umformen in

$$\left[\lambda \int_{-M}^{\lambda} \mu S^{-1} d\lambda \right]_{\lambda_0}^{\lambda_1} - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1} d\lambda.$$

Der Grenzwert des ersten Gliedes hiervon läßt sich unmittelbar angeben; ferner aber konvergiert, wie man durch eine sehr einfache Konvergenzbetrachtung zeigen kann, falls eine Reihe monotoner Funktionen gegen eine endliche (monotone) Funktion konvergiert, auch ihr Integral gegen das Integral der Grenzfunktion, so daß $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1} d\lambda$ den Grenzwert $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sigma d\lambda$ besitzt. Daher geht unsere Gleichung (4.) schließlich über in

$$(8.) \quad K(\sigma(\lambda_1; x) - \sigma(\lambda_0; x)) - [\lambda \sigma(\lambda; x)]_{\lambda_0}^{\lambda_1} + \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sigma(\lambda; x) d\lambda = 0.$$

Damit ist nun aber unser Ziel erreicht:

Wegen (6.) kann nämlich $\sigma(\lambda; x)$ für kein Wertsystem der x konstant sein, da

$$(9.) \quad \sigma(+M; x) - \sigma(-M; x) = \pi \sum_{(p)} x_p^2 = \pi$$

ist. Nun wäre es einerseits möglich, daß es an einer Stelle λ_0 einen nicht identisch in den x_p verschwindenden endlichen Sprung $\Delta\sigma(x) \leq \pi \sum_{(p)} x_p^2$ besitzt; dann folgt aus (8.), wenn wir das Intervall (λ_0, λ_1) um die Stelle λ_0 zusammenziehen:

$$(10.) \quad K \Delta\sigma(x) - \lambda_0 \Delta\sigma(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{(a)} k_{pa} \Delta\sigma_{aq} - \lambda_0 \Delta\sigma_{pq} = 0.$$

Da nun $\Delta\sigma$ nach der Annahme mindestens eine Zeile von nicht durchweg verschwindenden Koeffizienten hat, die zudem konvergente Quadratsumme besitzen, so existiert eine nicht verschwindende Eigenform, und λ_0 ist ein Eigenwert der Form $K(x)$. Wie man leicht sieht, fällt diese Annahme eines Sprunges von $\sigma(\lambda; x)$ damit zusammen, daß $K(\nu; x)$ an der Stelle $\nu = \lambda_0$ einen Pol mit dem Residuum $\Delta\sigma(x)$ hat.

Existiert aber zweitens kein solcher Sprung, so muß es wegen (9.) mindestens ein Intervall (λ_0, λ_1) geben, in dem die stetige Funktion $\sigma(\lambda; x)$ stetig wächst; dann können wir wegen (3.) des § 4 die Gleichung (8.) auch schreiben:

$$(11.) \quad K(\sigma(\lambda_1; x) - \sigma(\lambda_0; x)) - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda d\sigma(\lambda; x) = 0 \quad \text{oder}$$

$$\sum_{(a)} k_{pa} (\sigma_{aq}(\lambda_1) - \sigma_{aq}(\lambda_0)) - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda d\sigma_{pq}(\lambda) = 0.$$

Da nun nach der Annahme mindestens in einer Zeile der Koeffizienten von $\sigma(\lambda; x)$ nicht alle Koeffizienten konstant sind, und da sie zudem eine konvergente Quadratsumme haben, so existiert eine nicht identisch ver-

schwindende Differentialeigenform, und das Intervall (λ_0, λ_1) enthält gewiß Teile des Streckenspektrums der Form K .

Damit ist der am Anfang von § 8 ausgesprochene Fundamentalsatz vollständig bewiesen.

Im allgemeinen wird natürlich $\sigma(\lambda; x)$ sowohl Sprünge, als auch Intervalle stetigen Wachstums haben; die ersteren geben die sämtlichen Eigenwerte, die letzteren die sämtlichen Streckenspektra von $K(x)$. Man kann nun aber ein Verfahren angeben, das aus $\sigma(\lambda; x)$ die sämtlichen einzelnen Eigenformen sowie die einzelnen Differentialeigenformen in der in Kap. II festgestellten Normierung herzustellen gestattet, und so auch die *Vielfachheit* des Spektrums liefert; was das Streckenspektrum angeht, so kommt hier gerade das in § 9 meiner Dissertation angegebene Verfahren in Betracht. Dieser Hinweis möge hier genügen, um anzuzeigen, wie sich diese Betrachtungen des Kap. III auch zu einer vollständigen *Herstellung der sämtlichen Eigenformen* ausgestalten lassen.*)

Inhaltsübersicht.

Kap. I. Untersuchung des Punktspektrums.	
§ 1. Fundamenteleigenschaften linearer und quadratischer Formen unendlichvieler Veränderlicher	213
§ 2. Eigenformen der quadratischen Form	221
Kap. II. Untersuchung des Streckenspektrums.	
§ 3. Formen ohne Punktspektrum	231
§ 4. Hilfsätze über gewisse Integrale	234
§ 5. Eigenschaften der Differentiallösungen	240
§ 6. Systeme orthogonaler linearer Differentialformen	247
§ 7. Die Integraldarstellung der quadratischen Form für das Streckenspektrum	252
Kap. III. Die Existenz des Spektrums.	
§ 8. Die reziproke Form von $K - \nu E$ als analytische Funktion von ν .	259
§ 9. Verhalten der reziproken Form an der reellen Achse: das Spektrum.	265

*) Vorstehende Abhandlung hat im März 1909 der Philosophischen Fakultät der Universität Marburg als Habilitationsschrift vorgelegen.